Caminhos mais longos em grafos

Susanna F. de Rezende*
School of Computer Science and Communication
KTH Royal Institute of Technology
Estocolmo, Suécia
E-mail: sfdr@kth.se

***Resumo*—Neste trabalho, estudamos problemas sobre caminhos mais longos em grafos tanto do ponto de vista estrutural quanto algorítmico. A primeira parte tem como foco o estudo de problemas motivados pela seguinte questão levantada por T. Gallai em 1966: todo grafo conexo contém um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos? Discutimos alguns resultados da literatura acerca desses problemas e apresentamos nossas contribuições. Na segunda parte, investigamos o problema de encontrar um caminho mais longo em um grafo, o qual é NP-difícil para grafos arbitrários. Uma versão completa dos resultados apresentados neste trabalho pode ser encontrada em [26].**

***Abstract*— The central theme of this paper is the study of problems related to longest paths in graphs, both from a structural and an algorithmic point of view. The first part focuses on the study of problems motivated by the following question raised by T. Gallai in 1966: does every connected graph have a vertex common to all its longest paths? We discuss known results and present our contributions. In the second part, we investigate the problem of finding a longest path in a graph, which is NP-hard for arbitrary graphs. A full account of the results presented in this paper can be found in [26].**

***Keywords*—caminhos mais longos, intersecção de caminhos mais longos, grafo exoplanar, 2-árvore**

I. Introdução

A. A pergunta de Gallai

Em 1966, num colóquio em Tihany na área de grafos, Gallai [30] perguntou se todo grafo conexo contém um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos. A pergunta de Gallai é natural, pois é bem conhecido o fato de que, em um grafo conexo, quaisquer dois caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum. Também é conhecido o fato de que, em um grafo 2-conexo, quaisquer dois circuitos mais longos têm um vértice em comum. (Para entender a razão da exigência da 2-conexidade do grafo quando tratamos de circuitos, basta observar o grafo da Figura 1, no qual todos seus circuitos mais longos são dois a dois disjuntos.)

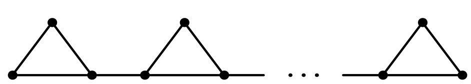

Figura 1. Grafo cujos circuitos mais longos são dois a dois disjuntos.

No entanto, quando Gallai formulou essa pergunta, já se conhecia um exemplo de um grafo 2-conexo que não possui um vértice comum a todos os seus circuitos mais longos. Esse exemplo é o bem conhecido grafo de Petersen (veja Figura 2), que é sabidamente hipo-hamiltoniano, ou seja, não possui um circuito hamiltoniano, mas o grafo obtido pela remoção de qualquer um de seus vértices é hamiltoniano. Portanto, o grafo de Petersen tem um circuito mais longo que evita qualquer vértice dado. Entretanto, até então, ninguém conhecia um exemplo equivalente para caminhos mais longos.

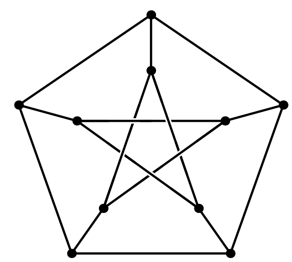

Figura 2. Grafo de Petersen.

Pouco tempo depois, Walther [83] pôde dar uma resposta a essa questão. Ele construiu um grafo (veja Figura 3) provando que não é sempre verdade que existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos. Esse grafo possui 25 vértices e seus caminhos mais longos têm comprimento 21. É possível encontrar 13 caminhos mais longos no grafo com intersecção vazia.

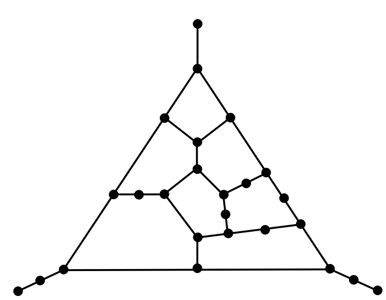

Figura 3. O grafo de Walther com 25 vértices.

Então, Walther [83] formulou outras perguntas a esse respeito: Esse exemplo é o menor possível? Qual o menor valor para n tal que existe um grafo com n vértices em que todos os caminhos mais longos têm intersecção vazia? Existe um número j tal que, para todo grafo G, existe um conjunto de

*Durante a elaboração da dissertação de mestrado à qual este trabalho se refere, a autora encontrava-se no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. O trabalho foi financiado pela FAPESP (Proc. 2011/16348-0).

j vértices cuja intersecção com qualquer caminho mais longo é não vazia? Se existe tal j, qual o menor valor para j?

No começo dos anos 70, Walther e Voss [81], e Zamfirescu [90], independentemente, encontraram um grafo menor, com 12 vértices, que responde negativamente à pergunta de Gallai (veja Figura 4).

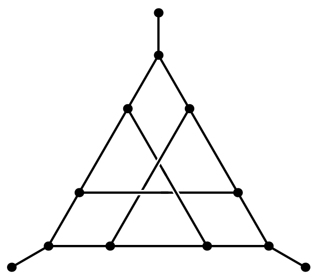

Figura 4. O grafo menor de Walther e Voss, e Zamfirescu com 12 vértices.

Em 1972, Zamfirescu [87] formulou diversas perguntas, inclusive generalizando as de Walther: Se impusermos restrições nos grafos (maior conexidade, planaridade), será que ainda assim existem exemplos (e se existir, qual a menor ordem deles) em que a intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia? E entre esses grafos, existem exemplos em que quaisquer j vértices ($j \geq 2$) são evitados por algum caminho mais longo? Na Seção IV apresentamos os progressos obtidos até hoje para obter respostas a essas perguntas.

Em particular, note que o primeiro grafo encontrado que responde negativamente à pergunta de Gallai é planar, mas o grafo da Figura 4 não o é. Até hoje, o menor grafo planar conhecido no qual todos os seus caminhos mais longos têm intersecção vazia é o da Figura 5, que foi obtido em 1975 por Schmitz [67] e possui 17 vértices. Nesse grafo os caminhos mais longos têm comprimento 13 e é possível encontrar 7 tais caminhos com intersecção vazia.

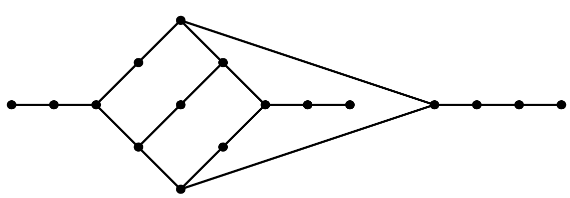

Figura 5. O grafo planar menor de Schmitz com 17 vértices.

Zamfirescu [89], [90] conjecturou que o grafo da Figura 4 e o grafo da Figura 5 são os menores grafos nos quais todos os caminhos mais longos têm intersecção vazia para o caso geral e para o caso planar, respectivamente. Recentemente, Brinkmann e Van Cleemput [68] provaram (usando computadores) que, no caso geral, 12 é de fato a menor ordem possível. Para o caso planar, porém, a questão permanece em aberto.

Observe que uma classe grande de grafos que respondem negativamente à pergunta de Gallai são os grafos hipotraçáveis. (Um grafo G é *hipotraçável* se G não tem um caminho hamiltoniano mas qualquer subgrafo de G obtido pela remoção de um vértice tem um caminho hamiltoniano.) Thomassen [73] provou a existência de um número infinito de grafos planares hipotraçáveis.

Como intersecção não vazia de todos os caminhos mais longos não é uma propriedade comum a todos os grafos, é natural investigar duas vertentes desse problema. Por um lado, pode-se estudar classes de grafos para as quais a pergunta de Gallai tem resposta positiva; por outro pode-se considerar a intersecção de um número menor de caminhos mais longos.

Em 1990, Klavžar e Petkovšek [60] apresentaram algumas classes de grafos cujos caminhos mais longos possuem intersecção não vazia. Nos últimos anos, identificamos vários progressos nessa linha [9], [66], [56], [27], [29]. Tratamos mais dessa questão na Seção II.

Por outro lado, é possível considerar a intersecção de um número pequeno de caminhos mais longos. Enquanto é fácil provar que quaisquer dois caminhos mais longos têm um vértice comum, não é sabido se quaisquer três caminhos mais longos também compartilham um vértice. Em 2009, Axenovich [8] apresentou uma classe de grafos que satisfazem a propriedade de que quaisquer três de seus caminhos mais longos têm intersecção não vazia. Voltamos a tratar desse problema na Seção III.

A esse respeito, podemos formular a seguinte pergunta mais geral: "Qual o maior valor de p tal que quaisquer p caminhos mais longos, em um grafo conexo, têm um vértice em comum?" O grafo da Figura 5 mostra que não é sempre verdade que quaisquer 7 caminhos mais longos têm um vértice em comum. Além disso, Skupień [69] obteve, para $n \geq 7$, um grafo conexo no qual existem n caminhos mais longos cuja intersecção é vazia, mas quaisquer $n-1$ caminhos mais longos têm um vértice em comum. Portanto, sabe-se que $2 \leq p \leq 6$.

B. *Busca de caminhos mais longos*

Em outra direção, temos o problema clássico conhecido como o problema do caminho mais longo: encontrar um caminho de comprimento máximo em um grafo. Sabe-se que esse problema é $\mathbf{NP}$-difícil [36] mesmo quando restrito a certas classes de grafos, como grafos planares [37], grafos grade [53], grafos círculo (circle graphs) [23], grafos cordais bipartidos, grafos divididos fortemente cordais (strongly chordal split graphs) [62], grafos de caminhos dirigidos (directed path graphs) [63] e grafos divididos (split graphs) [39].

Esse fato motiva investigações em duas linhas a respeito da busca de tais caminhos. Pode-se investigar classes especiais de grafos para as quais existem algoritmos polinomiais, ou pode-se abrir mão da busca de um caminho mais longo e projetar um algoritmo eficiente que encontra um caminho cujo comprimento esteja próximo do comprimento de um mais longo.

Existem classes de grafos para as quais já se conhece algoritmo polinomial para resolver o problema de encontrar um caminho mais longo. Em 1960, Dijkstra propôs um algoritmo linear bem simples para resolver o problema em árvores. Uma prova formal foi dada por Bulterman, Feijen, van der Sommen, van Gasteren, Verhoeff e Zwaan [15]. Nos anos 90, Bodlaender [13], [14] apresentou um algoritmo linear para k-árvores parciais, considerando k fixo. Em 2005, Uehara e Uno [76] apresentaram algoritmos polinomiais para árvores com custos nos vértices/arestas, grafos de blocos, cactos, entre outros. Em anos subsequentes, diversos autores [77], [78], [71],

[38], [3], [43], [19] obtiveram novos resultados nessa linha. Em 2009, Ioannidou, Mertzios e Nikolopoulos [51] provaram que para os grafos de intervalos existe um algoritmo polinomial que encontra um caminho mais longo. Posteriormente, esse resultado foi provado para classes ainda mais gerais: os grafos de cocomparabilidade [22], [52] e os grafos arco-circulares [11]. Discutimos esses resultados na Seção V.

Com relação a algoritmos de aproximação para o problema de encontrar um caminho mais longo, sabe-se que não existe algoritmo de aproximação com razão constante, a menos que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ [58]. Em 1985, surgiu o primeiro resultado de aproximação para esse problema. Monien [61] mostra um modo mais eficiente (embora ainda exponencial) de encontrar um caminho mais longo, o que tornou possível encontrar, em tempo polinomial, caminhos de comprimento $\Omega(\log n/ \log\log n)$, se tais caminhos existirem. Dez anos depois, Alon, Yuster e Zwick [2] desenvolveram o método de codificação por cor *(color-coding)* que permite encontrar, em tempo polinomial, um caminho de comprimento logarítmico no número de vértices do grafo, se tal caminho existir. Em 2003, Björklund e Husfeldt [12] exibiram um algoritmo polinomial que encontra um caminho de comprimento $\Omega(\log^2 L/ \log\log L)$, onde L é o comprimento de um caminho mais longo. Diversos outros autores [79], [34], [21], [32], [33] trabalharam para conseguir algoritmos que fornecessem uma melhor razão de aproximação, mesmo que restrito a algumas classes especiais. Para o caso geral, a melhor razão de aproximação conhecida até hoje foi obtida por Gabow e Nie [35] em 2008. Eles mostram que é possível encontrar um caminho de comprimento $2^{\Omega(\sqrt{\log L})}$. Tratamos da questão de encontrar soluções aproximadas para o problema do caminho mais longo nas Seções VI e VII.

Finalmente, na Seção VIII, são apresentadas algumas considerações finais e uma seleção de problemas em aberto.

C. Organização do trabalho e contribuições

Na primeira parte deste trabalho tratamos de questões estruturais relacionadas com a intersecção de caminhos mais longos. Apresentamos nossas contribuições (trabalho conjunto com Fernandes, Martin e Wakabayashi), que podem ser encontradas em [27]. Além disso, procuramos fazer um resumo dos resultados da literatura detalhando alguns dos que nos parecem mais relevantes. Na Seção II, encontram-se os principais resultados conhecidos de classes de grafos para os quais se sabe que todos seus caminhos mais longos têm intersecção não vazia. Também apresentamos dois novos resultados que obtivemos. Exibimos na Seção III resultados análogos para o problema restrito a três caminhos mais longos e o resultado que obtivemos para esse problema. A Seção IV contém outros problemas relacionados à questão central da dissertação que achamos de especial relevância e que, não só podem ser úteis para ajudar a solucionar o problema original, mas também são interessantes em si mesmos.

A segunda parte deste trabalho consistiu principalmente em estudar a fundo resultados da literatura relativos a busca de caminhos mais longos. Procuramos apresentar alguns em mais detalhe, o que exigiu, em alguns momentos, que se desenvolvessem trechos de provas que não estavam explicados ou que continham erros. A Seção V trata da dificuldade desse problema e dos algoritmos polinomiais conhecidos para certas classes de grafos. A Seção VI exibe alguns algoritmos de aproximação para o problema e a Seção VII contém resultados de inaproximabilidade do problema.

Algumas considerações finais e uma seleção de problemas em aberto são apresentados na Seção VIII.

D. Preliminares

Neste artigo todos os grafos são simples, ou seja, não possuem arestas paralelas e nem laços. Seja G um grafo simples. A seguir, definimos os conceitos básicos e notações que são utilizados ao longo do texto.

Dizemos que a *ordem* de G é a quantidade de vértices em G e denotamos esse valor por $|G|$.

Um *caminho* num grafo G é uma sequência de vértices distintos $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $i = 1, \ldots, k-1$. Denotamos por P^{-1} o reverso do caminho P, ou seja, o caminho $(v_k, \ldots, v_2, v_1)$.

Se x é um vértice (resp. uma aresta) em um grafo e P é um caminho nesse grafo tal que $x \notin V(P)$ (resp. $x \notin E(P)$), dizemos que P *evita* v, e se Q é um caminho tal que $x \in V(Q)$ (resp. $x \in E(Q)$), dizemos que Q *passa* por x. Se P é um caminho com término no vértice v e Q é um caminho com início em v, então $P \cdot Q$ denota a concatenação de P e Q. Por simplicidade, se u é um vértice adjacente a v, denotamos $P \cdot (v, u)$ por Pu, e $(u, v) \cdot Q$ por uQ.

Se $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ é um caminho em um grafo, $k \geq 3$, e v_k e v_1 são adjacentes, então $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ é um *circuito*. O *comprimento* de um caminho ou de um circuito H é $|E(H)|$ e é denotado por $\|H\|$.

Por simplicidade, em algumas demonstrações, denotamos caminhos por letras maiúsculas (por exemplo, P, Q, R) e denotamos seus comprimentos pela respectiva letra minúscula (p, q, r). Se P é um caminho e x e y são vértices de P, denotamos por P_{xy} a secção de P de x a y. Analogamente, se C é um circuito, então c denota seu comprimento; e se C está desenhado no plano sem cruzamento de suas arestas e x e y são vértices de C, denotamos por C_{xy} a secção de C de x a y em sentido horário.

Se G é um grafo e H é um caminho (resp. um circuito) em G tal que $|H| = |G|$, dizemos que H é um *caminho hamiltoniano* (resp. um *circuito hamiltoniano*) de G. Um grafo é *hamiltoniano* se contém um circuito hamiltoniano e é *traçável* se contém um caminho hamiltoniano. Um grafo G é *hipo-hamiltoniano* (resp. *hipotraçável*) se não é hamiltoniano (resp. traçável), mas se removermos qualquer vértice de G, o grafo resultante é hamiltoniano (resp. traçável).

Se H é um caminho (resp. circuito) em um grafo G, dizemos que H é um *caminho mais longo* (resp. *circuito mais longo*) em G, se H é um caminho (resp. circuito) de comprimento máximo.

Um grafo G é *conexo* se para quaisquer vértices distintos u e v em G existe um caminho com extremidades u e v. Um grafo G é *k-conexo* se o grafo resultante após a remoção de qualquer conjunto de $k-1$ vértices de G é conexo. Dizemos que um conjunto W de vértices de um grafo G é um *conjunto* *separador* se $G - W$ é desconexo. Em um grafo G, se, para algum vértice v, $\{v\}$ é um conjunto separador de G, então dizemos que v é um *vértice de corte*.

Uma *componente* de G é um subgrafo conexo maximal. Um *bloco* de G é ou um subgrafo 2-conexo maximal, ou um par de vértices ligados por uma aresta que não faz parte de uma componente 2-conexa, ou um vértice isolado. Um *bloco não trivial* é um subgrafo 2-conexo maximal.

Dado um bloco não trivial B de G, dizemos que um caminho P em G de comprimento pelo menos 1 é um *caminho pendente* de B se P intersecta B precisamente na sua origem e é maximal na direção do seu término.

Um grafo é *exoplanar* se possui uma imersão planar na qual todos os vértices pertencem à fronteira da face externa. Um grafo G é k-*exoplanar* se para $k = 1$, G é exoplanar e para $k > 1$, G possui uma imersão planar na qual a remoção de todos os vértices pertencentes à fronteira da face externa resulta em um grafo $(k-1)$-exoplanar.

Uma k-*árvore* é definida recursivamente da seguinte maneira. O grafo completo com k vértices é uma k-árvore. O grafo obtido a partir de uma k-árvore G adicionando um vértice adjacente a todos os vértices de um clique de ordem k de G é uma k-árvore. Uma k-*árvore parcial* é um grafo que é um subgrafo de alguma k-árvore.

II. Classes de grafos em que todos os caminhos mais longos se intersectam

Embora tenhamos visto diversos grafos para os quais a pergunta de Gallai tem resposta negativa, existem classes de grafos para as quais a resposta é sempre positiva. Por exemplo, em uma árvore, todos os caminhos mais longos contêm o(s) seu(s) centro(s). Em 1990, Klavžar e Petkovšek [60] provaram que a resposta também é positiva para grafos divididos (split graphs), cactos e algumas outras classes de grafos. Mais recentemente, Balister, Győri, Lehel e Schelp [9] estabeleceram um resultado semelhante para a classe dos grafos de intervalo. Em [26] pode-se encontrar uma exposição detalhada das provas de alguns desses resultados. Aqui nos concentramos principalmente em apresentar nossas contribuições nessa direção. Provamos que, para grafos exoplanares e 2-árvores, a resposta à pergunta de Gallai também é positiva. Recentemente, Ehremüller, Fernandes e Heise [29] provaram que o mesmo vale para grafos série-paralelos, uma superclasse dos grafos exoplanares e das 2-árvores. Entretanto, há diversas classes de grafos para as quais o problema continua em aberto.

A. Uma condição necessária e suficiente

Um primeiro resultado, fácil de se provar, é que em árvores todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum. Isso é um corolário da seguinte proposição, que pode ser demonstrada por indução no número de vértices do grafo.

Proposição 1: Seja G uma árvore e seja $\mathscr{P}$ um conjunto de subárvores de G. Se duas a duas todas as árvores de $\mathscr{P}$ se intersectam, então todas se intersectam em pelo menos um vértice.

Utilizaremos essa proposição para provar o Teorema 2 que, por sua vez, será útil para provar os resultados novos que obtivemos.

Klavžar e Petkovšek [60] apresentaram uma caracterização para grafos que têm um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos em termos de uma condição restrita aos seus blocos.

Teorema 1: Seja G um grafo conexo e seja $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os seus caminhos mais longos. Existe um vértice comum a todos os caminhos de $\mathscr{P}$ se e somente se, para todo bloco B de G, todos os caminhos de $\mathscr{P}$ que têm pelo menos uma aresta em B têm um vértice em comum. ∎

Em vista desse resultado, para mostrar que todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum, basta provar que, para cada bloco B de G, todos os caminhos mais longos que usam ao menos uma aresta de B têm um vértice em comum.

Se $\mathscr{P}$ é um conjunto de caminhos mais longos, chamamos de $\mathscr{P}_B$ o subconjunto de $\mathscr{P}$ formado pelos caminhos que possuem pelo menos uma aresta de B. O Teorema 1 pode ser escrito como: se $\widetilde{\mathscr{P}}$ é o conjunto de todos os caminhos mais longos de G, então $\bigcap \widetilde{\mathscr{P}} \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap \widetilde{\mathscr{P}}_B \neq \emptyset$ para todo bloco B de G.

A prova (da suficiência da condição nos blocos) desse teorema de Klavžar e Petkovšek na realidade demonstra o seguinte teorema, que é um pouco mais forte do que o resultado que enunciam. Note que o conjunto $\mathscr{P}$ do teorema a seguir não é necessariamente o conjunto de todos os caminhos mais longos do grafo, como no enunciado do Teorema 1.

Teorema 2: Seja G um grafo conexo e seja $\mathscr{P}$ um conjunto qualquer de caminhos mais longos. Se não existe um vértice comum a todos os caminhos de $\mathscr{P}$, então existe um bloco de G que contém ao menos uma aresta de cada caminho de $\mathscr{P}$.

Prova. Queremos provar que ou todos os caminhos de $\mathscr{P}$ se intersectam ou existe um bloco B tal que $\mathscr{P}_B = \mathscr{P}$. Vamos distinguir dois casos.

Caso 1: Para cada par de caminhos, existe um bloco no qual ambos têm uma aresta.

Neste caso, seja $T(G)$ a árvore de blocos associada a G. Considere $\mathscr{B}$ o conjunto de blocos de G e $\mathscr{W}$ o conjunto de vértices de corte de G. Neste caso, o conjunto de vértices de $T(G)$ é $\mathscr{B} \cup \mathscr{W}$ e existe uma aresta com extremidades $B \in \mathscr{B}$ e $w \in \mathscr{W}$ se $w \in B$. Se P é um caminho em G, denotamos por $f(P)$ a imagem de P em $T(G)$, ou seja, $f(P)$ é o caminho em $T(G)$ tal que um vértice x de $T(G)$ pertence a $f(P)$ se e somente se x intersecta P.

Sejam $f(P_1)$ e $f(P_2)$ um par de caminhos em $\{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$. Pela hipótese, existe um bloco em G no qual P_1 e P_2 têm uma aresta, e, portanto, $f(P_1)$ e $f(P_2)$ se intersectam em $T(G)$. Como isso vale para qualquer par de caminhos em $\{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$, então, pela Proposição 1, existe $v \in \bigcap\{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$. Se v corresponde a um vértice de corte x de G, então $x \in \bigcap \mathscr{P}$. Se v corresponde a um bloco B de G, então $\mathscr{P} = \mathscr{P}_B$.

Caso 2: Existem dois caminhos $P, Q \in \mathscr{P}$ tais que não existe nenhum bloco no qual ambos têm uma aresta.

Neste caso, P e Q não têm mais de um vértice em comum, pois se tivessem, ou teriam uma aresta em comum ou existiria um circuito em G formado por arestas de P e Q. Em ambos

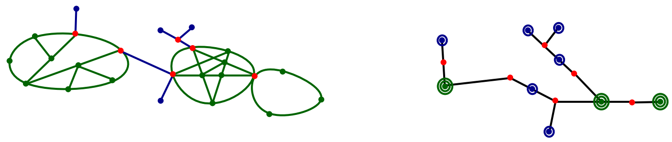

Figura 6. Um exemplo de um grafo G (lado esquerdo) e sua árvore de blocos $T(G)$ (lado direito). Os vértices de corte em G correspondem aos vértices menores em $T(G)$, e os blocos correspondem aos vértices maiores (os não triviais correspondem aos vértices de borda dupla).

os casos, existiria um bloco no qual ambos têm uma aresta. Logo, seja x o único vértice em $P \cap Q$. Afirmamos que $x \in \bigcap \mathscr{P}$. Suponha, por contradição, que $R \in \mathscr{P}$ não contenha x. Sabemos que R intersecta P e intersecta Q (pois quaisquer dois caminhos mais longos se intersectam). Seja $y \in P \cap R$ tal que P_{xy} é mínimo (não existe nenhum vértice interno de P_{xy} que pertence a R) e seja $z \in Q \cap R$ tal que Q_{xz} é mínimo. Como R não contém x, temos que $x \neq y$ e $x \neq z$. Além disso, como x é o único vértice que pertence a P e Q, então $y \neq z$ (veja Figura 7).

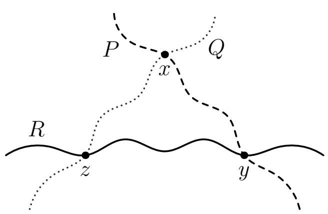

Figura 7. Circuito $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$.

Observe que $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$ forma um circuito. Como $\|P_{xy}\| \geq 1$ e $\|Q_{zx}\| \geq 1$, temos que existe um bloco que contém pelo menos uma aresta de P e pelo menos uma aresta de Q, o que é uma contradição. Logo, todo caminho em $\mathscr{P}$ necessariamente contém x. ■

Observe que o Teorema 1 implica que, se G é um cacto (um grafo conexo cujos blocos são arestas ou circuitos), um grafo de blocos (um grafo conexo cujos blocos são arestas ou cliques), ou se todo bloco de G é hamiltoniano-conexo (todo par de vértices distintos em cada bloco está ligado por um caminho hamiltoniano no bloco), então todos os caminhos mais longos de G têm um vértice em comum.

Apresentamos, agora, duas classes de grafos para os quais provamos que a intersecção de todos os seus caminhos é não vazia.

B. *Grafos exoplanares*

Uma classe de grafos que contém os cactos é a classe dos grafos exoplanares. Como já mencionamos, Klavžar and Petkovšek [60] provaram que a resposta para a pergunta de Gallai é positiva para cactos, enquanto Axenovich [8] provou que quaisquer três caminhos mais longos se intersectam em grafos exoplanares. Nesta seção, generalizamos esses dois resultados, provando que a resposta à pergunta de Gallai é positiva para grafos exoplanares.

Lembramos que, para um bloco não trivial B de um grafo G, dizemos que um caminho P em G de comprimento pelo menos um é um *caminho pendente* de B se P intersecta B precisamente na sua origem e é maximal na direção do seu término.

Teorema 3: Para todo grafo exoplanar conexo G, existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G.

Prova. Seja $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os caminhos mais longos de G, e suponha, por contradição, que $\bigcap \mathscr{P} = \emptyset$. Pelo Teorema 2, existe um bloco B de G tal que cada caminho em $\mathscr{P}$ tem ao menos uma aresta em B. Se B é um bloco trivial, segue imediatamente que todos os caminhos em $\mathscr{P}$ têm um vértice em comum. Portanto, suponha que B seja um bloco não trivial.

Seja C um circuito hamiltoniano em B (tal circuito existe pois G é exoplanar). Seja $R^\star$ um caminho pendente mais longo de B, e denote por v a origem de $R^\star$. Vamos provar que todos os caminhos em $\mathscr{P}$ contêm v.

Suponha que exista um caminho P em $\mathscr{P}$ que não contém v. Considere uma imersão planar do grafo G em que todos os vértices pertencem à fronteira de sua face externa. (Lembre que c_{uv} denota o comprimento de C_{uv}, o caminho no sentido horário em C do vértice u ao vértice v.) Seja x o vértice em $V(P) \cap V(B)$ tal que c_{xv} é mínimo e seja y o vértice em $V(P) \cap V(B)$ tal que c_{vy} é mínimo. Note que $x \neq y$, caso contrário P intersectaria B somente em x.

Agora seja z o vértice tal que $xz \in E(P) \cap E(B)$ e c_{yz} é mínimo. Suponha $y = z$, em outras palavras, suponha que x seja adjacente a y em P (veja a Figura 8). Neste caso, considere o caminho P' obtido de P substituindo a aresta xy pelo caminho C_{xy}, isto é, $P' = (P - xy) \cup C_{xy}$. Observe que P' é de fato um caminho, pois C_{xy} só intersecta P nos vértices x e y. Como v está no interior de C_{xy}, então $p' = p - 1 + c_{xy} \geq p - 1 + 2$. Portanto, $p' > p$, o que contradiz o fato de P ser um caminho mais longo.

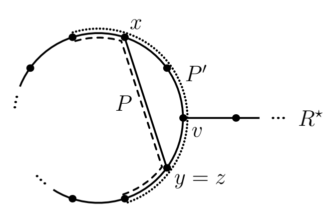

Figura 8. Caso $y = z$.

Suponha, então, que $y \neq z$. Sejam P_1 e P_2 os dois subcaminhos de P tais que $V(P_1) \cap V(P_2) = \{z\}$, $P = P_1 \cdot P_2$, $x \in V(P_1)$ e $y \in V(P_2)$ (veja Figura 9). Como G é exoplanar, P_2 contém somente vértices de C_{yz} e possivelmente um caminho pendente, digamos R. Logo, $c_{yz} \geq p_2 - r$. Agora, considere o caminho $P' = P_1 \cdot C_{vz}^{-1} \cdot R^\star$. Temos que $p' = p_1 + c_{vy} + c_{yz} + r^\star \geq p_1 + c_{vy} + p_2 - r + r^\star$. Como $r^\star \geq r$ e $c_{vy} > 0$, concluímos que $p' > p_1 + p_2 = p$, o que contradiz o fato de P ser um caminho mais longo em G. Portanto, P contém v, e isso completa a prova. ■

Como vimos anteriormente, a resposta para a pergunta de Gallai é negativa para grafos planares (como nos mostra o grafo da Figura 3, o da Figura 5 e os grafos planares hipotraçáveis [73]). De fato, a resposta é negativa até para grafos 2-exoplanares, pois o grafo da Figura 3 e o da Figura 5 são 2-exoplanares. Portanto, nesse sentido, o resultado anterior é justo.

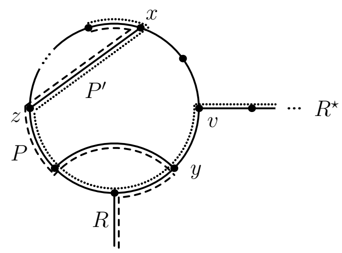

Figura 9. Caso $y \neq z$.

C. 2-árvores

O resultado principal que mostramos nesta seção é que para 2-árvores a resposta para a pergunta de Gallai é positiva. Primeiramente, definimos alguns conceitos e apresentamos alguns resultados auxiliares que valem para grafos arbitrários.

Dados um caminho P em um grafo G e uma aresta $e = xy$, dizemos que e *confina* P se $P - x - y$ está contido em uma única componente de $G - x - y$. Se e não confina P, dizemos que P *cruza* e. Além disso, se $\mathscr{P}$ denota um conjunto de caminhos mais longos em G, então $\mathscr{P}_e$ denota o subconjunto de caminhos de $\mathscr{P}$ que cruzam e. Observe que se $G - x - y$ é conexo, $\mathscr{P}_e$ é vazio.

Lema 1: Seja G um grafo conexo e seja $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os caminhos mais longos de G. Para cada aresta e de G, uma de suas extremidades está contida em todos os caminhos de $\mathscr{P}_e$.

Prova. Seja $e = xy$ uma aresta de G. Suponha que existam dois caminhos P e Q em $\mathscr{P}_e$ tais que P contém x, mas não y, e Q contém y, mas não x. Sejam $P = P' \cdot P''$ com $\{x\} = V(P') \cap V(P'')$ e $Q = Q' \cdot Q''$ com $\{y\} = V(Q') \cap V(Q'')$. Como ambos P e Q cruzam e, podemos supor, sem perda de generalidade, que P' e Q'' estejam em componentes distintas de $G - x - y$ e que $p' \geq q'$. Por conseguinte, $P' \cdot (x, y) \cdot Q''$ é um caminho e é mais longo que Q, uma contradição. ■

Dados um caminho P em um grafo G e uma aresta $e = xy$, defina $C_e(P)$ como sendo a união dos conjuntos de vértices das componentes de $G - x - y$ que contêm ao menos um vértice de P. Usamos a notação simplificada $C_e(v)$ para nos referir a $C_e(P)$ quando P consiste apenas no vértice v.

Lema 2: Se um grafo conexo G contém caminhos mais longos P e Q e uma aresta e tais que $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$, então todos os caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.

Prova. Suponha que a condição do lema esteja satisfeita, e seja $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os caminhos mais longos em G. Apresentamos dois casos.

Caso 1: Existe uma escolha para e, P e Q tais que Q intersecta apenas uma extremidade de e.

Sejam x e y as extremidades de e, e suponha que Q contenha x, mas não y. Note que P necessariamente contém x pois $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$, e P e Q necessariamente se intersectam. Seja $P = P' \cdot P''$ com $\{x\} = V(P') \cap V(P'')$ e $y \notin V(P')$, e $Q = Q' \cdot Q''$ com $\{x\} = V(Q') \cap V(Q'')$. Como $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$, segue que $P' \cdot Q'$ é um caminho em G. Chame esse caminho de R. Na Figura 10 mostramos as duas possibilidades para o caminho P: (a) P contém x mas não y; (b) P contém x e y (possivelmente a secção de P de x a y é simplesmente a aresta e).

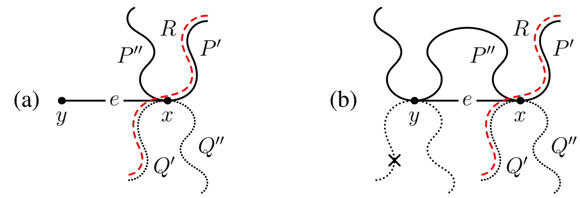

Figura 10. O caminho Q contém x, mas não y.

Note que R cruza e, pois $C_e(P') \cap C_e(Q') = \emptyset$. Como P e Q são caminhos mais longos, P', P'', Q', e Q'' devem ter o mesmo comprimento. Logo, R é também um caminho mais longo. Como R contém x e não y, pelo Lema 1, todos os caminhos em $\mathscr{P}_e$ contêm x.

Por outro lado, todo caminho mais longo S confinado por e é tal que ou $C_e(S) \cap C_e(P) = \emptyset$ ou $C_e(S) \cap C_e(Q) = \emptyset$, pois $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$. Vamos mostrar que S contém x. Suponha que não. Portanto, necessariamente $C_e(S) \subseteq C_e(Q)$ (caso contrário S não intersectaria Q) e S necessariamente intersecta P em y como na Figura 10(b). Seja $S = S' \cdot S''$ com $\{y\} = V(S') \cap V(S'')$, e suponha que $s'' \geq s'$. Logo, $P' \cdot (x, y) \cdot S''$ é um caminho mais longo que P, uma contradição. Portanto, S contém x, e concluímos que todos os caminhos mais longos confinados por e contêm x.

Caso 2: Para qualquer escolha de $e = xy$, P e Q tal que $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$, vale que ambos P e Q contêm x e y.

Seja S um caminho mais longo confinado pela aresta e. Neste caso, ou $C_e(S) \cap C_e(P) = \emptyset$, ou $C_e(S) \cap C_e(Q) = \emptyset$. Afirmamos que S contém ambos x e y. De fato, se esse não fosse o caso, então e, S e ou P ou Q contradiriam a suposição do caso. Portanto, todos os caminhos mais longos confinados por e contêm ambos x e y. Esse fato, juntamente com o Lema 1, implica que ou x ou y é comum a todos os caminhos mais longos. ■

Notamos que, no Lema 2, se G é 2-conexo, então a prova acima se reduz somente ao Caso 2, já que é sabido (como veremos na Seção IV) que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo 2-conexo se intersectam em ao menos dois vértices. Na prova do resultado principal, só aplicamos o Lema 2 a grafos 2-conexos, mas preferimos provar um resultado mas geral que se aplica também a grafos que não são 2-conexos.

Recordamos que uma 2-*árvore* (subclasse de k-árvore) é definida recursivamente da seguinte maneira. Uma aresta é uma 2-árvore. Qualquer grafo obtido a partir de uma 2-árvore adicionando um vértice novo e fazendo-o adjacente às extremidades de uma aresta existente é também uma 2-árvore. Dizemos que uma 2-árvore é não trivial se contém ao menos três vértices. Note que toda aresta em uma 2-árvore não trivial pertence a um triângulo. É sabido [82] que 2-árvores não contêm K_4 como menor topológico.

Seja Δ um triângulo em um dado grafo. Para cada aresta e em Δ, denotamos por v_e o vértice de Δ no qual e não incide.

Lema 3: Se Δ é um triângulo em um grafo G, então ou G contém K_4 como menor topológico ou $C_e(v_e) \cap C_f(v_f) \cap C_g(v_g) = \emptyset$, onde $E(\Delta) = \{e, f, g\}$.

Prova. Suponha que exista $u \in C_e(v_e) \cap C_f(v_f) \cap C_g(v_g)$. Como $u \in C_e(v_e)$, temos que $u \notin \{v_f, v_g\}$. Semelhantemente, $u \in C_f(v_f)$ implica que $u \neq v_e$. Logo, $u \notin \{v_e, v_f, v_g\}$. Além disso, existe um caminho, internamente disjunto de Δ, de u para cada vértice de Δ. Portanto, a união desses três caminhos e Δ gera K_4 como menor topológico. ∎

O conceito definido a seguir tem um papel importante na prova do resultado principal. Um triângulo Δ em um grafo conexo G é dito *forte* se, para cada aresta e em Δ, existe um caminho mais longo P em G tal que e confina P, e $C_e(P) = C_e(v_e)$. Tal caminho é chamado de *e-confinado*, supondo que Δ esteja claro no contexto.

Lema 4: Se toda aresta de uma 2-árvore não trivial G confina um caminho mais longo então G contém um triângulo forte.

Prova. Seja G uma 2-árvore não trivial em que toda aresta confina um caminho mais longo. Seja D um digrafo construído da seguinte forma. O conjunto de vértice de D é $A \cup B$, onde $A = E(G)$ e B é o conjunto de todos os triângulos em G. O conjunto de arcos de D é definido a seguir. Temos um arco (e, Δ) com $e \in A$ e $\Delta \in B$ se e é uma aresta de Δ e existe um caminho mais longo P em G que é e-confinado.

Pela hipótese do lema, toda aresta em A tem grau de saída ao menos um em D. Portanto, existem ao menos $|A|$ arcos em D. Note que, como G é uma 2-árvore, $|A| = 2|B| + 1$. Logo, existe um triângulo Δ com grau de entrada pelo menos três em D. Pela definição de D, temos que Δ é um triângulo forte em G. ∎

Teorema 4: Para toda 2-árvore G, existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G.

Prova. Seja G uma 2-árvore não trivial (caso contrário o resultado é imediato). Se existe uma aresta e em G que não confina um caminho mais longo, então todos os caminhos mais longos cruzam e, e, pelo Lema 1, a intersecção de todos os caminhos mais longos é não vazia. Logo, podemos supor que toda aresta em G confina um caminho mais longo e portanto, pelo Lema 4, existe um triângulo forte Δ em G.

Se existe um caminho mais longo P confinado por uma aresta e de Δ tal que $C_e(P) \neq C_e(v_e)$ então, pelo Lema 2, a prova segue. Caso contrário, para cada aresta e em Δ, todo caminho mais longo P confinado por e é tal que $C_e(P) = C_e(v_e)$, ou seja, é e-confinado.

Se todo caminho mais longo e-confinado contém ambas as extremidades de e, para alguma aresta e em Δ, então, pelo Lema 1, a intersecção de todos os caminhos mais longos é não vazia.

Se um caminho mais longo P é confinado simultaneamente por todas as arestas de Δ, então $C_e(P) = C_e(v_e)$ para toda aresta e em Δ. Como G é uma 2-árvore, G não contém um K_4 como menor topológico. Logo, o Lema 3 implica que P tem apenas (e todos os) vértices em Δ, ou seja, G é precisamente o triângulo Δ, e a prova segue. Portanto, podemos supor que cada caminho mais longo é confinado por no máximo duas arestas de Δ.

Sejam e, f e g as arestas de Δ e seja P um caminho mais longo confinado por e e g. Logo, P cruza f. Note que qualquer vértice u de P que não está em Δ pertence a $C_g(P) \cap C_e(P) = C_g(v_g) \cap C_e(v_e)$. Novamente, pelo Lema 3, temos que $u \notin C_f(v_f)$. Logo, o único vértice em $C_f(v_f)$ que P pode conter é v_f. Entretanto, como P é um caminho mais longo, se P contém v_f, então necessariamente contém todos os vértices em Δ. Se P não contém nenhum vértice de $C_f(v_f)$, concluímos a prova do teorema aplicando o Lema 2 a f, P e qualquer caminho mais longo f-confinado. Portanto, daqui em diante supomos que todo caminho mais longo confinado por precisamente duas arestas de Δ contenha todos os vértices de Δ.

Seja $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os caminhos mais longos em G. Vamos mostrar que um dos vértices de Δ está em todos os caminhos em $\mathscr{P}$.

Pelo Lema 1, sabemos que uma das extremidades de cada aresta h de Δ está contida em todos os caminhos em $\mathscr{P}_h$. (Mais adiante dizemos porque cada $\mathscr{P}_h$ é não vazio.) Oriente h em direção a tal extremidade. Assim temos uma orientação de e, f, e g.

Se, com essa orientação, Δ é um circuito dirigido, sem perda de generalidade, podemos supor que Δ está orientado como na Figura 11.

Para cada aresta h de Δ, seja Q_h um caminho mais longo h-confinado que não contém ambas as extremidades de h. O caminho Q_h é confinado por apenas uma aresta de Δ, a saber h, e, portanto, cruza as outras duas arestas de Δ. Logo, $\mathscr{P}_h$ é não vazio para cada aresta h de Δ. Pela orientação de f e g, o caminho Q_e contém ambos v_e e v_f. Analogamente, Q_f contém ambos v_f e v_g, e Q_g contém ambos v_g e v_e. Veja a Figura 11.

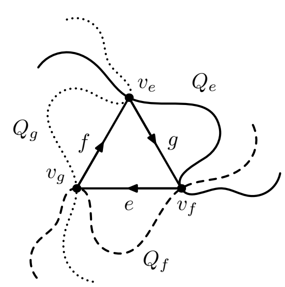

Figura 11. Caminhos Q_e, Q_f, e Q_g.

Seja $Q_e = Q'_e \cdot Q''_e$ com $\{v_e\} = Q'_e \cap Q''_e$ e v_f em Q''_e. Semelhantemente, defina Q'_f, Q''_f, Q'_g, e Q''_g. Seja $Q = Q'_g \cdot (v_g, v_e) \cdot Q''_e$. Como esse caminho não pode ser mais longo que Q_e, temos que $q'_e > q'_g$. Analogamente, podemos concluir que $q'_g > q'_f > q'_e$, o que leva a uma contradição.

Resta analisar o caso em que Δ tem um sorvedouro. Sem perda de generalidade, suponha que v_f seja o sorvedouro (veja a Figura 12).

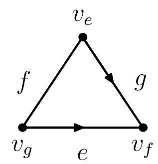

Figura 12. Triângulo Δ com um sorvedouro.

Vamos mostrar que v_f está em todos os caminhos mais longos. Seja P um caminho mais longo. Como já observamos, se P é confinado por duas arestas de Δ, P contém os três vértices de Δ, logo contém v_f. Suponha que P seja confinado por no máximo uma aresta de Δ. Se P cruza e, então P contém v_f (pela orientação de e). Caso contrário P é confinado por e e, portanto, cruza f e g. Mas, se P cruza g, pela orientação de g, P contém v_f, e o teorema segue. ■

III. Classes de grafos em que quaisquer três caminhos mais longos se intersectam

Como vimos anteriormente, não é sabido se quaisquer três caminhos mais longos compartilham um vértice. Essa pergunta foi levantada por Zamfirescu [80], [91] na década de 80 [92]. A questão foi mencionada na 15ª Conferência Britânica de Combinatória [17], aparece como conjectura no livro *Combinatorics and Graph Theory* de Harris, Hirst e Mossinghoff [45] e como um problema aberto na lista coletada e mantida por West [85].

Conjectura 1: Para todo grafo conexo, quaisquer três caminhos mais longos têm um vértice em comum.

Excluindo os resultados que abrangem a intersecção de todos os caminhos mais longos, um dos primeiros progressos na Conjectura 1 foi obtido por Axenovich [8], que provou o seguinte resultado.

Teorema 5: Se G é um grafo conexo exoplanar, então quaisquer três caminhos mais longos em G têm um vértice em comum. ■

A principal técnica usada para provar o Teorema 5 foi a de estabelecer configurações que não ocorrem quando se considera a união de três caminhos mais longos, mostrando que, se ocorressem, então seria possível construir um caminho de comprimento maior que o mais longo. A partir dessas configurações foi possível obter alguns outros resultados interessantes, por exemplo:

Lema 5: Seja G um grafo conexo que é a união de três caminhos mais longos, digamos P_1, P_2 e P_3. Se $P_1 \cup P_2$ tem no máximo um circuito, então existe um vértice comum a P_1, P_2 e P_3. ■

Além da técnica citada acima, outro método utilizado foi o de considerar um contraexemplo minimal para a Conjectura 1, ou seja, um grafo com menor número possível de arestas no qual três caminhos mais longo não têm um vértice em comum. Se for possível chegar a uma contradição, supondo que tal grafo exista, então sabe-se que a Conjectura 1 é válida.

Axenovich [8] considera um contraexemplo minimal dentro da classe dos grafos exoplanares. Observe que não se pode usar essa técnica para qualquer classe de grafos, pois ao contrairmos ou removermos uma aresta, o grafo resultante pode não estar na classe original. Portanto, além do caso em que se considera o problema geral para qualquer grafo, só é possível usar essa técnica para classes de grafos que são fechadas para operações de remoção/contração de arestas, como é o caso da classe dos grafos exoplanares ou dos planares.

Axenovich [8] provou que, para qualquer classe de grafos fechada para operações de remoção/contração de arestas, um contraexemplo minimal para a Conjectura 1 possui apenas um bloco não trivial.

Essa técnica também foi explorada por Kensell [59], que obteve outros resultados, dentre eles algumas características de um contraexemplo minimal como, por exemplo, cintura pelo menos 4. Kensell obteve uma leve generalização do Teorema 5, provando que o resultado vale para grafos que são subdivisões de grafos exoplanares.

Não reproduzimos aqui a prova de Axenovich [8] para o Teorema 5, pois é muito extensa. Ademais, este segue como corolário do Teorema 3 e, como veremos a seguir, também segue do Teorema 6.

Apresentamos um resultado que obtivemos para grafos conexos cujos blocos não triviais são hamiltonianos. Essa classe inclui os exoplanares e, portanto, esse teorema também generaliza o Teorema 5.

Lembramos que, para um bloco não trivial B de G, dizemos que um caminho P de comprimento pelo menos um é um caminho pendente de B se P intersecta B precisamente na sua origem e é maximal na direção do seu término. Além disso, se P é um caminho e B é um bloco que está claro no contexto, denotamos por $\widetilde{P}$ a intersecção de P com B, ou seja, $\widetilde{P} = B \cap P$.

Teorema 6: Se G é um grafo conexo em que todos os blocos não triviais são hamiltonianos, então quaisquer três caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.

Prova. Seja $\mathscr{P}$ um conjunto de três caminhos mais longos de G e suponha, por contradição, que $\bigcap \mathscr{P} = \emptyset$. Pelo Teorema 2, existe um bloco B de G que contém pelo menos uma aresta de cada caminho em $\mathscr{P}$. Vamos supor que esse bloco seja não trivial, caso contrário o resultado é imediato.

Seja C um circuito hamiltoniano de B. Lembramos que $\widetilde{p}$ denota o comprimento de $\widetilde{P}$ e c o comprimento de C. Queremos mostrar que

$$\sum_{P \in \mathscr{P}} \widetilde{p} \geq 2c. \qquad (1)$$

Note que, se provarmos que a desigualdade (1) vale, então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, podemos concluir que existe pelo menos um vértice que aparece nos três caminhos de $\mathscr{P}$. Observe que a desigualdade (1) não necessita ser estrita, pois estamos considerando o comprimento dos caminhos (ou seja, o número de arestas).

Se um caminho de $\mathscr{P}$ contém todos os vértices de B, então o resultado segue pois os outros dois caminhos necessariamente se intersectam em B. Portanto, podemos supor que todos os caminhos em $\mathscr{P}$ contenham dois caminhos pendentes de B. Doravante, consideramos apenas caminhos pendentes de B que estão contidos em algum caminho de $\mathscr{P}$. Observe que possivelmente existem dois caminhos pendentes com a mesma origem (neste caso eles têm necessariamente o mesmo comprimento).

Se todos os caminhos pendentes intersectam o bloco B em apenas dois vértices, então o resultado é imediato. Logo, sejam T_x, T_y e T_z três caminhos pendentes de B que são disjuntos e são os três mais longos possíveis, onde x, y e z denotam suas origens, respectivamente.

Caso 1: Existe uma função f bijetora de $\{x, y, z\}$ para $\mathscr{P}$ tal que $f(u)$ não contém um caminho pendente com origem u. Ou seja, existe um mapeamento f entre os vértices $\{x, y, z\}$ e os caminhos em $\mathscr{P}$ tal que, para cada u, existe um caminho $f(u) \in \mathscr{P}$ que não contém um caminho pendente com origem u e, além disso, $f(u) \neq f(v)$, para $u \neq v$.

Por simplicidade, suponha que x, y e z apareçam em sentido horário em C. Seja $P_u = f(u)$, para cada u em $\{x, y, z\}$. Para provar (1), vamos encontrar um limite inferior para cada $\widetilde{p}_u$ e mostrar que a soma dos três limites inferiores é pelo menos $2c$.

Considere os caminhos pendentes R e R' tais que $P_x = R^{-1} \cdot \widetilde{P}_x \cdot R'$. Observe que $t_y + t_z \geq r + r'$, pois $\{T_x, T_y, T_z\}$ é um conjunto de três caminhos pendentes de B, que são disjuntos e os mais longos possíveis, e P_x não contém nenhum caminho pendente com origem x. Considere o caminho

$$Q_x = T_z^{-1} \cdot C_{zx} \cdot C_{xy} \cdot T_y,$$

como na Figura 13. Lembrando que $p_x \geq q_x$ (ou seja, $r + \widetilde{p}_x + r' \geq t_y + \widetilde{q}_x + t_z$) e, como $t_y + t_z \geq r + r'$, temos que $\widetilde{p}_x \geq \widetilde{q}_x$.

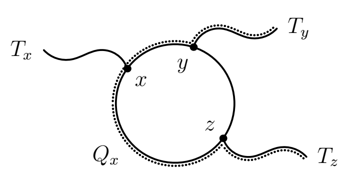

Figura 13. Configuração de Q_x.

Analogamente, considerando

$$Q_y = T_x^{-1} \cdot C_{xy} \cdot C_{yz} \cdot T_z,$$
$$Q_z = T_y^{-1} \cdot C_{yz} \cdot C_{zx} \cdot T_x,$$

temos que $\widetilde{p}_y \geq \widetilde{q}_y$ e $\widetilde{p}_z \geq \widetilde{q}_z$. Logo, concluímos que $\widetilde{p}_x + \widetilde{p}_y + \widetilde{p}_z \geq \widetilde{q}_x + \widetilde{q}_y + \widetilde{q}_z$. Como $\widetilde{q}_x + \widetilde{q}_y + \widetilde{q}_z = 2c$ (veja Figura 14), a desigualdade (1) vale.

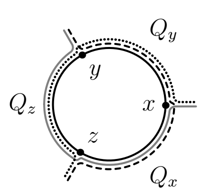

Figura 14. $\widetilde{q}_x + \widetilde{q}_y + \widetilde{q}_z = 2c$.

Caso 2: Não existe tal função f.

Neste caso, existem dois caminhos em $\mathscr{P}$, digamos P_1 e P_2, cujos caminhos pendentes compartilham as mesmas origens. Podemos considerar que o terceiro caminho em $\mathscr{P}$, digamos P_3, possui dois caminhos pendentes com origens distintas das origens dos caminhos pendentes de P_1, pois, caso contrário, já teríamos um vértice comum aos três caminhos.

Logo, B tem quatro caminhos pendentes com origens distintas. Suponha que as origens w, x, y e z dos caminhos pendentes de B apareçam em sentido horário em C. Seja T_u um caminho pendente com origem u, para $u \in \{w, x, y, z\}$. Analogamente ao caso 1, construímos caminhos que forneçam um limitante inferior para $\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3$, mas, neste caso, não para cada $\widetilde{p}_i$ individualmente.

Considere os caminhos

$$Q_1 = T_z^{-1} \cdot C_{zw} \cdot C_{wx} \cdot C_{xy} \cdot T_y,$$
$$Q_2 = T_w^{-1} \cdot C_{wx} \cdot C_{xy} \cdot C_{yz} \cdot T_z,$$
$$Q_3 = T_x^{-1} \cdot C_{xy} \cdot C_{yz} \cdot C_{zw} \cdot T_w,$$
$$Q_4 = T_y^{-1} \cdot C_{yz} \cdot C_{zw} \cdot C_{wx} \cdot T_x.$$

Figura 15 mostra a configuração de Q_1.

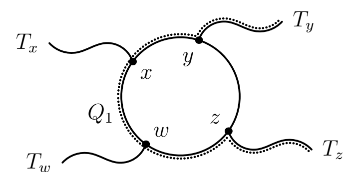

Figura 15. Configuração de Q_1.

Somando os comprimentos e considerando que $\widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2 + \widetilde{q}_3 + \widetilde{q}_4 = 3c$ (veja Figura 16), temos

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2(t_w + t_x + t_y + t_z) + 3c. \tag{2}$$

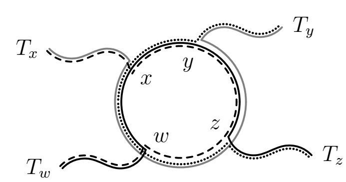

Figura 16. $\widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2 + \widetilde{q}_3 + \widetilde{q}_4 = 3c$.

Lembre que os caminhos pendentes de P_1 e P_2 compartilham as mesmas origens e são disjuntos dos caminhos pendentes de P_3. Portanto,

$$p_1 + p_2 + 2p_3 = 2(t_w + t_x + t_y + t_z) + \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + 2\widetilde{p}_3. \tag{3}$$

Como $p_i \geq q_j$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, então

$$p_1 + p_2 + 2p_3 \geq q_1 + q_2 + q_3 + q_4. \tag{4}$$

Por (2), (3) e (4), concluímos que $\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + 2\widetilde{p}_3 \geq 3c$. Como $\widetilde{p}_3 < c$, então (1) vale. Logo, necessariamente existe um vértice comum a P_1, P_2 e P_3. ■

A seguinte pergunta, relacionada com o teorema anterior, surge de maneira natural: é possível substituir "três caminhos mais longos” por “todos os caminhos mais longos” e garantir que a afirmação correspondente vale? A resposta é não, como nos mostram os grafos das Figuras 4 e 5.

IV. Outros resultados relacionados

Sabemos que quaisquer dois caminhos mais longos se intersectam. Mas em quantos vértices? Isso depende da conexidade do grafo. Tratamos dessa questão na primeira parte desta seção.

Também sabemos que não é verdade que todo grafo possui um vértice que pertence a todos os caminhos mais longos. Mas será que todo grafo possui dois vértices tais que todo caminho mais longo contém ao menos um dos dois? Se a resposta a essa pergunta for negativa, será que, no lugar de dois, podemos colocar alguma constante para que a resposta seja positiva? Essas questões serão tratadas mais adiante nesta seção.

A. Vértices comuns a dois caminhos mais longos

É bem conhecido o fato de que, em grafos 2-conexos, quaisquer dois caminhos mais longos têm ao menos dois vértices em comum. Também é verdade que, em grafos 2-conexos, quaisquer dois circuitos mais longos têm ao menos dois vértices em comum. Esses resultados estão relacionados, como mostramos mais a diante. Em 1984, Grötschel [40] apresentou a seguinte conjectura, que diz respeito a circuitos mais longos.

Conjectura 2: Em todo grafo k-conexo, $k \geq 2$, quaisquer dois circuitos mais longos têm ao menos k vértices em comum.

No artigo citado acima, Grötschel afirma que, por comunicação de R. Häggkvist e J. A. Bondy, soube que essa conjectura foi feita por Scott Smith em 1979, quando ainda era aluno de ensino médio, e que a veracidade dessa conjectura provavelmente já foi verificada para $k \leq 10$ (até $k \leq 8$ segue como corolário dos Teoremas 7, 8 e 10 que apresentamos a seguir). Não encontramos nenhuma prova de que o resultado vale para $k = 9$ ou $k = 10$, e para o caso geral a conjectura permanece em aberto.

Burr e Zamfirescu [16], [91] provaram que, para $k \geq 2$, em todo grafo k-conexo, quaisquer dois circuitos mais longos têm ao menos $\sqrt{k}$ vértices em comum. Essa demonstração não foi publicada, mas Hippchen [48] apresentou uma prova do resultado na sua tese de mestrado. Chen, Faudree e Gould [20] obtiveram um resultado assintoticamente melhor. Eles provaram que, para $k \geq 2$, em todo grafo k-conexo, quaisquer dois circuitos mais longos têm ao menos $ck^{3/5}$ vértices em comum, onde $c \approx 0,2615$.

Com relação a caminhos mais longos, Hippchen [48] conjecturou que a afirmação análoga é verdade.

Conjectura 3: Em todo grafo k-conexo, quaisquer dois caminhos mais longos têm ao menos k vértices em comum.

Os resultados e as demonstrações que apresentamos a seguir e que não possuem referência, foram inspirados pela demonstração do Teorema 3.11.11 de Voss [80] e, até onde sabemos, não se encontram desta forma na literatura.

Primeiramente, provamos que a Conjectura 2 implica a Conjectura 3.

Lema 6: Dados inteiros k e ℓ, se em todo grafo k-conexo quaisquer dois circuitos mais longos se intersectam em ao menos ℓ vértices, então em todo grafo $(k-1)$-conexo quaisquer dois caminhos mais longos se intersectam em ao menos $\ell - 1$ vértices.

Prova. Seja $G = (V, E)$ um grafo $(k-1)$-conexo e sejam P e Q dois caminhos mais longos em G. Adicione um vértice novo, digamos x, e faça-o adjacente a todos os vértices de G. Chame esse novo grafo de H. Observe que xPx e xQx são circuitos mais longos de H. Note também que, se G é $(k-1)$-conexo, então H é k-conexo. Logo, se xPx e xQx se intersectam em ao menos ℓ vértices, então P e Q se intersectam em ao menos $\ell - 1$ vértices. ■

Não sabemos se a afirmação recíproca é verdadeira, ou seja, se a Conjectura 3 implica a Conjectura 2.

É conhecido o fato de que a Conjectura 3 vale para $k \leq 3$ (Jain e Sakalle [54] e Hippchen [48] apresentam uma prova desse fato). Os seguintes resultados de Grötschel [41], [40] implicam que a Conjectura 2 vale para $k \leq 6$, e, portanto, pelo Lema 6, a Conjectura 3 vale para $k \leq 5$. É interessante notar que Grötschel buscava caracterizações de grafos em que dois circuitos/caminhos mais longos se intersectam em apenas k vértices, e que os resultados que ele obteve podem ser úteis no estudo da intersecção de vários caminhos mais longos.

Lembramos que um conjunto separador de um grafo é um conjunto de vértices do grafo tal que sua remoção resulta em um grafo desconexo.

Teorema 7: Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, e sejam C e D dois circuitos mais longos distintos que se intersectam em exatamente dois vértices, digamos u e v. Sejam $C = P_1 \cup P_2$ e $D = Q_1 \cup Q_2$, onde P_i e Q_i, $i \in \{1, 2\}$, são segmentos de u a v de C e D, respectivamente. As seguintes afirmações valem:

1) $\{u, v\}$ é um conjunto separador;
2) $\|P_1\| = \|P_2\| = \|Q_1\| = \|Q_2\|$, logo o circuito tem comprimento par;
3) os caminhos truncados $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{Q}_1, \overline{Q}_2$ obtidos removendo os vértices u e v das extremidades de P_1, P_2, Q_1, Q_2 estão em componentes distintas de $G - \{u, v\}$;
4) todo circuito mais longo de G contém ambos u e v;
5) para todo circuito mais longo B de G, os dois caminhos de $B - \{u, v\}$ pertencem a componentes distintas de $G - \{u, v\}$. ■

Teorema 8: Seja $k \in \{3, 4\}$, e seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com pelo menos $k + 1$ vértices. Suponha que C e D sejam dois circuitos mais longos distintos que se intersectam em um conjunto W de k vértices de G. As seguintes afirmações valem:

1) W é um conjunto separador;
2) se $k = 3$, os caminhos obtidos removendo W de C e D estão em componentes distintas de $G - W$. ■

Definimos a *circunferência* de um grafo como o comprimento de um circuito mais longo do grafo. Grötschel enunciou esse resultado para $k \in \{3, 4, 5\}$ e conjecturou que, se adicionarmos no Teorema 8 a hipótese de que a circunferência do grafo seja ao menos $k+1$, o mesmo vale para $k \in \{6, 7\}$. Na realidade, Grötschel não percebeu que essa hipótese também é necessária para $k = 5$. De fato, observe o grafo da Figura 17. É fácil ver que esse grafo não é hamiltoniano. Portanto, $C = v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ é um circuito mais longo e também o é $D = v_1v_2v_4v_3v_5v_1$. Portanto C e D se intersectam no conjunto $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $|W| = 5$, mas W não é um conjunto separador.

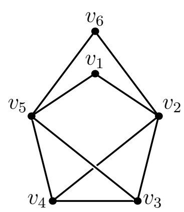

Figura 17. Grafo em que dois circuitos mais longos se intersectam em um conjunto W de 5 vértices e W não é um conjunto separador.

Note que a circunferência desse grafo é $k = 5$ e os circuitos C e D são sobre um mesmo conjunto de vértices. Se exigirmos que a circunferência do grafo seja ao menos $k + 1$ ou que os circuitos mais longos não possam ser sobre o mesmo conjunto de vértices, a prova de Grötschel está correta.

Teorema 9: Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com circunferência pelo menos 6, e C e D são dois circuitos mais longos distintos que se intersectam em um conjunto W de 5 vértices de G, então W é um conjunto separador. ■

Ademais, com a hipótese adicional de que a circunferência do grafo seja ao menos $k + 1$, o Teorema 8 vale não só para $k = 5$, mas também para $k = 6$ e $k = 7$. Esse fato foi provado por Stewart [70] em 1987, usando essencialmente a mesma técnica de Grötschel. A abordagem de Grötschel foi a de analisar — na força bruta — os diversos modos em que dois circuitos podem se intersectar em k vértices. Obviamente, quanto maior o k, maior o número de casos que precisam ser analisados. Para $k = 5$, são 4 casos; já para $k = 6$ são 10 casos e para $k = 7$ são 25 casos! Assim, para k grande, o método de Grötschel se torna inviável. Stewart utiliza um computador para sistematizar a análise dos casos. Segundo o autor, embora esse não seja o método mais elegante e muitos possam ver essa prova com certo ceticismo, o computador é uma ferramenta que pode ter um papel muito importante em teoria dos grafos e, quando os programas são simples de ser implementados e verificados, os resultados não devem ser desacreditados.

Teorema 10: Seja $k \in \{6, 7\}$ e seja G um grafo com circunferência ao menos $k+1$. Se C e D são dois circuitos mais longos que se intersectam em um conjunto W de exatamente k vértices, então W é um conjunto separador. ■

O mesmo resultado não vale para $k = 8$, como podemos ver pelo grafo de Petersen. De fato, esse grafo tem 10 vértices e é hipo-hamiltoniano, ou seja, ele não é hamiltoniano, e, dado qualquer vértice, é possível encontrar um circuito hamiltoniano que não passa por ele. Logo, um circuito mais longo tem comprimento 9. Além disso, dado qualquer aresta uv do grafo de Petersen, é possível encontrar um circuito mais longo C que não passa por u e um circuito mais longo D que não passa por v. A intersecção de C e D são todos os vértices exceto u e v. Logo, $W = C \cap D$ não é um conjunto separador, pois existe uma aresta entre u e v. Note, porém, que isso não implica que a Conjectura 2 não vale para $k = 9$, apenas que não é possível prová-la exatamente da mesma maneira que provamos para $k \leq 8$.

Ao tratar de grafos k-conexos, temos a vantagem de saber que os circuitos mais longos são necessariamente longos. Dirac [28] provou o seguinte resultado.

Teorema 11: Seja G um grafo 2-conexo com n vértices e grau mínimo δ. Um circuito mais longo em G tem comprimento ao menos $\min\{2\delta, n\}$. ■

Observe que um grafo k-conexo tem grau mínimo pelo menos k. Logo, podemos dizer que um grafo k-conexo, $k \geq 2$, é hamiltoniano ou tem um circuito de comprimento pelo menos $2k$.

Corolário 1: Seja G um grafo k-conexo, $k \geq 2$, com n vértices. Um circuito mais longo em G tem comprimento ao menos $\min\{2k, n\}$. ■

Como mencionamos anteriormente, o seguinte resultado é um corolário dos Teoremas 7, 8, 9 e 10.

Corolário 2: Em todo grafo k-conexo, $2 \leq k \leq 8$, quaisquer dois circuitos mais longos têm ao menos k vértices em comum.

Prova. Seja G um grafo k-conexo, $2 \leq k \leq 8$, e sejam C e D dois circuitos mais longos em G. Seja W o conjunto de vértices que estão em ambos os circuitos. Suponha, por contradição, que $|W| < k$. Pelo Corolário 1, sabemos que G tem circunferência pelo menos $\min\{2k, n\} \geq k + 1$, logo podemos aplicar o Teorema 7, 8, 9 ou 10 e concluir que W é um conjunto separador. Mas isso é uma contradição, pois G é k-conexo e $|W| < k$. ■

Pelo Corolário 2 e pelo Lema 6, o seguinte resultado é imediato.

Corolário 3: Em todo grafo k-conexo, $1 \leq k \leq 7$, quaisquer dois caminhos mais longos têm ao menos k vértices em comum. ■

Observe que o grafo bipartido $K_{k,2k+2}$ (veja Figura 18) mostra que a Conjectura 3 é justa.

B. Vértices evitados por caminhos mais longos

A pergunta de Gallai de 1966 deu origem a muitas outras. Algumas das mais estudadas tiveram como inspiração uma pergunta de Sachs [31], feita também no colóquio em Tihany de 1966, que diz respeito a circuitos mais longos. Sachs perguntava se, para todo grafo 3-conexo, existem dois vértices tais que todo circuito mais longo contém ao menos um dos dois. Walther [84] mostrou, através de um grafo com 220 vértices, que isso não é sempre verdade.

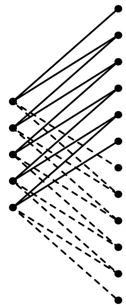

Figura 18. Dois caminhos mais longos em um $K_{5,12}$.

Perguntas similares que dizem respeito a caminhos mais longos foram levantadas por Walther [83] em 1969 e por Zamfirescu [87] em 1972. Walther perguntou: “Existe um número j tal que todo grafo conexo possui um conjunto de j vértices que intersecta todo caminho mais longo?” Zamfirescu fez essa pergunta para classes específicas de grafos, como os k-conexos e os planares.

Neste trabalho, a fim de facilitar a compreensão, adotamos uma notação distinta da que foi introduzida por Zamfirescu [87] em 1972 e que inclusive é mais geral. Se existir um grafo no qual, dado um conjunto qualquer de j vértices, algum caminho mais longo evita esses j vértices, então denotamos por $\mathbf{\Gamma}_j$ o menor número de vértices de um tal grafo. Se tal grafo não existir, dizemos que $\mathbf{\Gamma}_j = \infty$. Se quisermos adicionar alguma restrição na classe de grafos que estamos considerando, explicitamos essa restrição entre colchetes. Por exemplo, se estamos considerando o problema restrito a grafos k-conexos planares, dizemos $\mathbf{\Gamma}_j[k\text{-conexo, planar}]$.

Com essa nomenclatura, podemos reescrever a pergunta de Gallai como: $\mathbf{\Gamma}_1 = \infty$? E a pergunta de Walther como: $\mathbf{\Gamma}_j < \infty$ para algum j? Pelo grafo da Figura 4, sabemos que $\mathbf{\Gamma}_1 \leq 12$ (como mencionamos na Seção I-A, já foi provado que $\mathbf{\Gamma}_1 = 12$) e pelo grafo da Figura 5, sabemos que $\mathbf{\Gamma}_1[\text{planar}] \leq 17$.

Várias pessoas, em particular Grünbaum, Hatzel, Schmitz, Thomassen, Walther, C. Zamfirescu e T. Zamfirescu [42], [47], [67], [74], [81], [87], [89], [90], [86], trabalharam para descobrir limitantes superiores para os $\mathbf{\Gamma}_j$’s ou provar que os limitantes são justos. Não houve progressos no estabelecimento de limitantes para os $\mathbf{\Gamma}_j[k\text{-conexo}]$’s desde os anos 70, mas recentemente foram encontrados limitantes mais justos para os $\mathbf{\Gamma}_j[3\text{-conexo}, planar]$’s, utilizando grafos hipo-hamiltonianos planares menores [57], [4], que não eram conhecidos anteriormente. Zamfirescu [90] traz um resumo dos progressos feitos até 1976 e Voss [80] exibe duas tabelas com essas informações. Kensell [59] reúne esses resultados e alguns mais recentes. Abaixo reproduzimos as tabelas com os valores atualizados.

		j		
		1	2	3
	1	$= 12$	≤ 93	?
k	2	≤ 26	≤ 270	?
	3	≤ 36	≤ 270	?
	4	?	?	?

Tabela I. TABELA COM OS VALORES ATUALIZADOS DE $\mathbf{\Gamma}_j[k\text{-CONEXO}]$.

		j		
		1	2	3
	1	≤ 17	≤ 308	?
k	2	≤ 32	≤ 914	?
	3	≤ 156	≤ 10.350	?
	4	∞	∞	∞

Tabela II. TABELA COM OS VALORES ATUALIZADOS DE $\mathbf{\Gamma}_j[k\text{-CONEXO, PLANAR}]$.

Pela restrição de espaço, não apresentamos aqui como os resultados das Tabelas I e II foram obtidos. Apenas relatamos um pouco da história desses resultados e apresentamos alguns exemplos. Para uma exposição mais detalhada, referimos o leitor a [26].

Uma primeira pergunta que se procura responder é: para que valores de j e k vale que $\mathbf{\Gamma}_j[k\text{-conexo}] < \infty$ (ou $\mathbf{\Gamma}_j[k\text{-conexo, planar}] < \infty$)? Primeiramente, consideramos o caso em que $j = 1$. Já falamos anteriormente dos grafos que mostram que $\mathbf{\Gamma}_1 < \infty$ e $\mathbf{\Gamma}_1[\text{planar}] < \infty$. Já para provar que $\mathbf{\Gamma}_1[2\text{-conexo}]$, o primeiro exemplo encontrado foi um grafo 2-conexo de 82 vértices, obtido por Zamfirescu [87] em 1972, que, por ser planar, também provava que $\mathbf{\Gamma}_1[2\text{-conexo, planar}] < \infty$. Hoje, os menores exemplos 2-conexo e 2-conexo planar conhecidos têm, respectivamente, 26 e 32 vértices [69], [90] (veja Figuras 19 e 20).

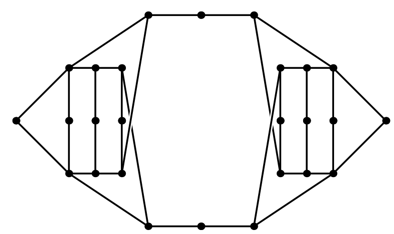

Figura 19. Menor grafo 2-conexo que mostra que $\mathbf{\Gamma}_1[2\text{-conexo}] < \infty$.

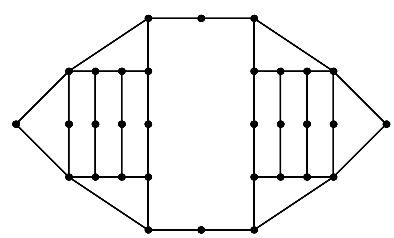

Figura 20. Menor grafo que mostra que $\mathbf{\Gamma}_1[2\text{-conexo, planar}] < \infty$.

O mesmo problema para grafos 3-conexos tem uma resposta dada por um grafo hipotraçável com 40 vértices obtido por Horton [44], [49] (veja Figura 21). Um fato interessante é que esse foi o primeiro grafo hipotraçável conhecido [44], embora atualmente se conheça grafos hipotraçáveis menores [72]. Zamfirescu [90] produziu uma resposta melhor para $\mathbf{\Gamma}_1[3\text{-conexo}]$ com 36 vértices (veja Figura 22). Nesse último grafo pode-se verificar que qualquer vértice pode ser evitado por um caminho mais longo através da simetria do grafo e da hipo-hamiltonicidade do grafo de Petersen.

Para grafos 4-conexos, não se conhece nenhum exemplo que mostre que $\mathbf{\Gamma}_1[4\text{-conexo}] < \infty$. Já para grafos 4-conexos planares, tal exemplo não existe, ou seja,

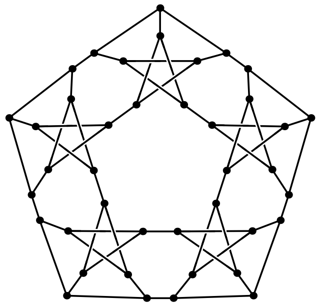

Figura 21. Primeiro grafo 3-conexo que provou que $\mathbf{\Gamma}_1[\text{3-conexo}] < \infty$.

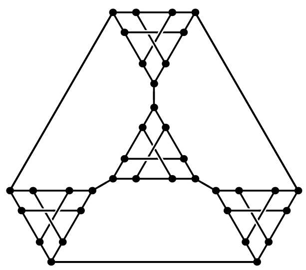

Figura 22. Menor grafo 3-conexo que mostra que $\mathbf{\Gamma}_1[\text{3-conexo}] < \infty$.

$\mathbf{\Gamma}_1[\text{4-conexo, planar}] = \infty$. Isso é consequência direta do célebre Teorema de Tutte que afirma que todo grafo 4-conexo planar é hamiltoniano. Na realidade, o Teorema de Tutte implica que $\mathbf{\Gamma}_j[\text{4-conexo, planar}] = \infty$ para todo $j \geq 1$.

Consideramos, agora, o caso em que $j = 2$ (buscamos grafos nos quais, para quaisquer dois vértices, existe um caminho mais longo que evita ambos). O primeiro grafo encontrado que prova que $\mathbf{\Gamma}_2 < \infty$, foi obtido por Grünbaum [42] em 1974, tem 324 vértices e é 3-conexo (ou seja, também determina que $\mathbf{\Gamma}_2[\text{2-conexo}] < \infty$ e $\mathbf{\Gamma}_2[\text{3-conexo}] < \infty$). Para $\mathbf{\Gamma}_2$, Zamfirescu [88] obteve um resultado melhor com 93 vértices. Considerando apenas grafos planares, um grafo de ordem 308 e um grafo 2-conexo de ordem 914, encontrados em 1975 por Zamfirescu [88], continuam sendo os menores conhecidos. Já no caso dos grafos 3-conexos planares, a descoberta de grafos hipo-hamiltonianos planares cada vez menores, tem diminuído o limitante superior de $\mathbf{\Gamma}_2[\text{3-conexo, planar}]$.

Interessantemente, não se sabe nada sobre o valor de $\mathbf{\Gamma}_3$. Pode, inclusive, ser verdade que, para qualquer grafo conexo, existe um conjunto de três vértices que intersecta todos os caminhos mais longos do grafo (ou seja, é possível que $\mathbf{\Gamma}_3 = \infty$).

V. BUSCA DE UM CAMINHO MAIS LONGO

Em teoria dos grafos, "o problema do caminho mais longo" se refere, usualmente, ao problema de encontrar um caminho de comprimento máximo em um dado grafo. Embora esse problema não esteja diretamente relacionado à pergunta de Gallai, é possível que resultados de um problema sejam úteis para achar soluções de outro.

Por exemplo, um algoritmo eficiente para encontrar caminhos mais longos em uma determinada classe de grafos pode facilitar o estudo da caracterização estrutural desses caminhos, tanto por meio da análise do algoritmo, como da observação de resultados em algumas instâncias.

Também é possível que um resultado estrutural possibilite o desenvolvimento de um algoritmo eficiente. Por exemplo, Grötschel e Nemhauser [41] usam diversas propriedades estruturais de grafos, inclusive algumas das apresentadas na Seção IV-A relacionadas com intersecção de circuitos mais longos, para obter um algoritmo polinomial que resolve o problema do corte máximo para grafos sem circuitos ímpares longos, e sugerem que esses resultados de intersecção de circuitos mais longos possam ser úteis para o desenvolvimento de algoritmos recursivos para problemas de otimização combinatória.

Portanto, o estudo desta questão algorítmica pode ser tanto um instrumento quanto uma motivação para o estudo de caracterizações estruturais de intersecção de caminhos mais longos.

Como vimos na introdução, existem duas possíveis direções de pesquisa para o problema de encontrar caminhos mais longos. Nesta seção, discutimos brevemente algumas classes especiais de grafos para as quais existem algoritmos polinomiais.

Para algumas classes de grafos, sabe-se que o problema de encontrar um caminho hamiltoniano admite solução polinomial, como grafos de intervalos [5], [18], [24], grafos arco-circulares [24], grafos biconvexos [7] e grafos de cocomparabilidade [25]. Portanto, é natural que tenha sido investigado se, para essas classes, existem algoritmos polinomiais para o problema do caminho mais longo. Na realidade, esse fato foi provado para todas as classes mencionadas acima.

O primeiro algoritmo polinomial para encontrar caminhos mais longos em uma determinada classe de grafos, foi proposto por Dijkstra por volta de 1960 e encontra, em tempo linear, um caminho mais longo em uma árvore. É interessante notar que uma prova formal só foi publicada em 2002 por Bulterman, Feijen, van der Sommen, van Gasteren, Verhoeff e Zwaan [15].

Caminho mais longo em árvore (G)
Escolha um vértice qualquer da árvore G; nomeie-o x
Encontre um caminho mais longo em G com início x.
Chame a outra extremidade desse caminho de y.
Encontre um caminho mais longo em G com início y.
Chame a outra extremidade desse caminho de z.
Devolva o caminho de y a z. Esse é um caminho mais longo em G.

Para compreender melhor o algoritmo, os autores [15] descreveram-no de uma forma muito tangível. Imagine que nos é dado um modelo físico da árvore em que cada dois vértices adjacentes são ligados por um pedaço de barbante de mesmo comprimento. Agora escolha um vértice x qualquer da árvore física e segure a árvore a partir de x, deixando o restante pendurado. Chame de y o vértice mais distante de x (o que está mais em baixo no modelo físico). Segure a árvore a partir de y e chame de z o vértice mais distante de y. O caminho entre y e z é um caminho mais longo na árvore.

Note que em uma árvore existe apenas um caminho entre quaisquer dois vértices (denotado por $P(u,v)$, para vértices u, v), logo a distância entre dois vértices (denotada por $d(u,v)$) é o comprimento do caminho mais longo entre esses dois vértices.

É fácil ver que esse algoritmo é polinomial. A prova de que está correto segue do fato de que o algoritmo garante que $d(x,w) \leq d(x,y), \forall w \in V(G)$ e que $d(y,w) \leq d(y,z), \forall w \in V(G)$, e de que as seguintes três propriedades valem: (1) a medida de distância satisfaz a desigualdade triangular; (2) para qualquer vértice c no caminho entre dois vértices a e b, vale que $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$; (3) para quaisquer vértices a,b,c,d ou $P(a,b)$ intersecta $P(c,d)$ ou $P(a,c)$ intersecta $P(b,d)$. Note que a propriedade (3) vale apenas para árvores.

Em 2009, Ioannidou, Mertzios e Nikolopoulos [51] desenvolveram um algoritmo polinomial que encontra um caminho mais longo em grafos de intervalos, uma superclasse dos grafos limiares (para os quais já se conhecia algoritmo polinomial [76]). Omitimos, pela limitação de espaço, a apresentação desse algoritmo (que pode ser encontrada em [26]).

Existem outras classes de grafos para as quais já se conhece algoritmo polinomial para resolver o problema do caminho mais longo. Bodlaender [13], [14] provou que existe um algoritmo linear que resolve esse problema para k-árvore parciais, considerando k-fixo, (que incluem os grafos série-paralelos). Uehara e Uno [76], [77] apresentaram algoritmos polinomiais para grafos de blocos, cactos, grafos de permutação bipartidos, grafos limiares (threshold graphs) e algumas outras classes de grafos. Andreica, Manev, Markov e Ţăpuş [3] melhoraram o algoritmo para cactos, e Uehara e Valiente [78] para grafos de permutação bipartido. Takahara, Teramoto e Uehara [71] propuseram um algoritmo polinomial que encontra um caminho mais longo em grafos ptolomaicos, uma superclasse dos grafos de blocos; e Guo, Ho e Ko [43] em grafos distância-hereditários, uma superclasse dos grafos ptolomaicos. Ghosh, Narayanaswamy e Rangan [38] provaram que para grafos biconvexos, uma superclasse dos grafos de permutação bipartido, o problema também é polinomial. Recentemente, Chang, Hsu e Peng [19] provaram o mesmo fato para os grafos de permutação, outra superclasse dos grafos de permutação bipartido.

Corneil e Mertzios [22], e Ioannidou e Nikolopoulos [52], independentemente, desenvolveram algoritmos que encontram (em tempo polinomial) um caminho mais longo em grafos de cocomparabilidade, que é uma superclasse dos grafos de intervalos. Bezáková e Mertzios [11] encontraram algoritmos polinomiais que resolvem o problema para os grafos arco-circulares, outra superclasse dos grafos de intervalos.

Embora existam diversas classes em que o problema admite solução polinomial, conforme mencionamos na introdução, sabemos que esse problema é $\mathbf{NP}$-difícil [36] mesmo quando restrito a algumas classes, como grafos planares [37], grafos grade [53], grafos círculo [23], grafos cordais bipartidos, grafos divididos fortemente cordais [62], grafos de caminhos dirigidos [63] e grafos divididos [39].

Uma extensão natural para esse problema é pesquisar se algumas outras classes “intermediárias” admitem solução polinomial, como por exemplo, as classes dos grafos convexos (uma subclasse de grafos cordais bipartidos e uma superclasse de grafos biconvexos) e dos grafos de cointervalos (uma subclasse de grafos de comparabilidade e uma superclasse de grafos limiares).

VI. Algoritmos de aproximação

Uma abordagem que tem sido investigada no tratamento do problema do caminho mais longo é a de encontrar algoritmos de aproximação para esse problema. Ou seja, projetar algoritmos polinomiais que recebem como entrada um grafo com n vértices e encontram caminhos de comprimento ao menos $f(n)$ vezes o comprimento de um caminho mais longo, para alguma função f. Neste caso, dizemos que um tal algoritmo tem razão de aproximação $f(n)$.

Nesta seção descrevemos brevemente três desses algoritmos que utilizam técnicas distintas e que fornecem razões de aproximação sucessivamente melhores. A melhor razão de aproximação para esse problema conhecida hoje é de Gabow e Nie [35]. Eles apresentam um algoritmo que encontra um caminho de comprimento $\exp(\Omega(\sqrt{\log L}))$, onde L é o comprimento de um caminho mais longo. Não provamos aqui esse resultado, mas a ideia por trás desse algoritmo tem semelhanças com o algoritmo que apresentamos na Seção VI-C.

Uma exposição mais detalhada dos algoritmos pode ser encontrada em [26], onde, para facilitar o entendimento e para corrigir pequenos erros nas provas, fizemos algumas modificações, com relação às demonstrações dos autores, e detalhamos algumas passagens mais relevantes.

A. *Representantes de famílias*

Em 1985, Monien [61] desenvolveu um algoritmo para encontrar caminhos de comprimento k em um grafo com n vértices, de forma mais eficiente que o algoritmo ingênuo de enumerar todas as sequências de $k+1$ vértices. O algoritmo ingênuo resolve o problema em tempo $\mathrm{O}(n^{k+1})$. Obviamente, esse algoritmo só é polinomial em n para k constante.

O algoritmo de Monien encontra um caminho de comprimento k (se tal caminho existir) em tempo exponencial em k, a saber $\mathrm{O}(k!\,nm)$, o que permite encontrar, em tempo polinomial em n, caminhos de comprimento $\log n/\log\log n$. Esse algoritmo calcula a matriz $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$, $1 \leq i,j \leq n$, onde $d_{ij}^{(k)}$ é igual a algum caminho de i a j de comprimento k, se tal caminho existir, e $d_{ij}^{(k)}$ é igual a um símbolo especial λ, caso contrário. O resultado principal de Monien é o seguinte.

Teorema 12: Seja G um grafo com n vértices e m arestas e seja k um número natural. A matriz $D^{(k)}(G)$ pode ser calculada em tempo $\mathrm{O}(k!\,nm)$. ■

Observando que $k! \leq k^k$, e que $(\frac{\log n}{\log\log n})^{\frac{\log n}{\log\log n}} = n^{1-\frac{\log\log\log n}{\log\log n}} \leq n$, o seguinte corolário segue imediatamente.

Corolário 4: Seja G um grafo com n vértices e m arestas. É possível encontrar um caminho de comprimento $\log n/\log\log n$, se tal caminho existir, em tempo $\mathrm{O}(n^2 m)$. ■

B. Método de codificação por cores

Em 1995, Alon, Yuster e Zwick [2] desenvolveram um método que chamaram de "color-coding" (codificação por cores) para resolver alguns problemas de isomorfismo de subgrafos em tempo polinomial. Em particular, esse método permite encontrar em tempo polinomial um caminho de comprimento $\log n$ em um grafo com n vértices, se tal caminho existir. Isso resolve afirmativamente a conjectura de Papadimitriou e Yannakakis [65] de que é possível decidir em tempo polinomial se um grafo de ordem n tem um caminho de comprimento $\log n$.

O método de codificação por cores é mais geral do que o que descrevemos aqui, podendo ser usado para encontrar subgrafos homeomorfos a outros grafos de largura arbórea limitada (grafos que são k-árvores parciais para k limitado), como os próprios autores demonstram [2], entre outras aplicações, inclusive em bioinformática, que outros [50], [1] desenvolveram mais recentemente. O resultado que apresentamos aqui é o seguinte.

Teorema 13: Em um grafo G com m arestas, é possível encontrar um caminho de comprimento k, se tal caminho existir, em tempo esperado $2^{\mathrm{O}(k)}m$.

Embora o algoritmo que produz esse resultado seja aleatorizado, é possível desaleatorizá-lo usando funções de *hashing*, como fazem os autores no artigo citado, com uma perda de apenas $\log|V(G)|$ na eficiência. Aqui apresentamos apenas a versão aleatorizada.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ uma coloração aleatória dos vértices de G com k cores (cada vértice tem probabilidade $1/k$ de receber a cor i, para $i \in \{1, \ldots, k\}$). Chamamos um caminho de *multicolorido* se o caminho não contém dois vértices de mesma cor. Suponha que exista um caminho de comprimento $k-1$ em G. A probabilidade de que esse caminho seja multicolorido é $k!/k^k > e^{-k}$. Supondo que esse caminho seja multicolorido, quanto tempo levaria para encontrá-lo? O seguinte lema responde a essa pergunta.

Lema 7: Seja G um grafo com m arestas e seja $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ uma coloração dos seus vértices com k cores. Um caminho multicolorido de comprimento $k-1$, se tal caminho existir, pode ser encontrado em tempo $2^{\mathrm{O}(k)}m$.

Prova. Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices e m arestas. Apresentamos o algoritmo (determinístico) que encontra um caminho multicolorido, se tal caminho existir, no grafo. Primeiramente adicionamos um vértice universal s (um vértice que é vizinho de todos os vértices de G) e colorimos s com a nova cor 0. Em seguida, procuramos um caminho multicolorido de comprimento k que começa em s usando programação dinâmica.

Suponha que já tenhamos encontrado para cada $v \in V$ os possíveis conjuntos de cores de caminhos multicoloridos de ordem i de s a v. Note que não necessitamos manter todos os caminhos coloridos de s a v, apenas guardamos os conjuntos de cores que aparecem em tais caminhos. Logo, para cada v, temos uma coleção associada de no máximo $\binom{k}{i}$ conjuntos de cores. Para cada conjunto de cor C que pertence a coleção associada a um vértice v, e para cada aresta $vu \in E$, se $c(u) \notin C$, então acrescentamos $C \cup \{c(u)\}$ a coleção de u correspondente a caminhos multicoloridos de ordem $i+1$. O grafo G contém um caminho multicolorido de comprimento k que começa em s se e somente se a coleção final, correspondente a caminhos multicoloridos de comprimento k, de algum vértice é não vazia. Em cada fase esse algoritmo realiza no máximo $\mathrm{O}(m\, i\binom{k}{i})$ operações. Portanto, o número total de operações realizadas é no máximo $\mathrm{O}(m \sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i})$ que é claramente $2^{\mathrm{O}(k)}m$. ∎

Prova do Teorema 13. Seja G um grafo com m arestas. Como mencionamos anteriormente, em cada coloração do grafo, um caminho de comprimento k tem probabilidade $k!/k^k > e^{-k}$ de ser multicolorido. Logo, o número esperado de colorações aleatórias que devemos produzir até obter uma em que um dado caminho é multicolorido é menor que $e^k = 2^{\mathrm{O}(k)}$. Pelo Lema 7, para cada coloração, pode-se decidir se existe e, se existir, encontrar um caminho multicolorido de comprimento $k-1$ em tempo $2^{\mathrm{O}(k)}m$. Logo, o tempo esperado para encontrar um caminho de comprimento $k-1$ em G é $2^{\mathrm{O}(k)} \cdot 2^{\mathrm{O}(k)}m = 2^{\mathrm{O}(k)}m$. Portanto, o Teorema 13 segue. ∎

Como consequência direta desse teorema temos o seguinte resultado.

Corolário 5: Seja grafo G um grafo com n vértices. É possível encontrar um caminho de comprimento $\log n$, se um tal caminho existir, em tempo esperado polinomial em n. ∎

Observe que essa ideia de manter apenas o conjunto das cores que aparecem em um caminho de s a v (ou equivalentemente apenas um caminho para cada conjunto de cores) é similar a ideia do Monien de manter apenas representantes de famílias. Ademais, ambos esses resultados mostram que o problema do caminho mais longo é FPT (*Fixed Parameter Tractable*) quando parametrizado pelo comprimento do caminho.

C. Árvore de decomposição em circuitos

Em 2003, Björklund e Husfeldt aprestaram um algoritmo polinomial que encontra um caminho de comprimento $\Omega(\frac{\log^2 L}{\log\log L})$ em um grafo cujos caminhos mais longos têm comprimento L.

Teorema 14: Seja G um grafo com n vértices que contém um caminho de comprimento L. Podemos encontrar um caminho de comprimento $\Omega(\frac{\log^2 L}{\log\log L})$ em tempo polinomial em n.

A ideia principal do algoritmo é a de decompor o grafo em circuito disjuntos "longos" e depois juntá-los formando um caminho longo. Omitimos a apresentação do algoritmo, que pode ser encontrada em [26].

Conforme mencionamos anteriormente, esse algoritmo não é o melhor algoritmo de aproximação conhecido hoje. O algoritmo de Gabow e Nie [35] encontra caminhos de comprimento $\exp\Omega(\sqrt{\log L})$), onde L é o comprimento de um caminho mais longo no grafo. Para entender melhor a relação entre esses resultados, observe que, para garantir que o algoritmo de Björklund e Husfeldt devolva um caminho de comprimento $\Omega(k)$, é necessário que um caminho mais longo tenha ao menos $2^{\sqrt{k}}$ vértices (pois a garantia é de encontrar um caminho de comprimento $\log^2 L/\log\log L < \log^2 L$), enquanto que, para o algoritmo de Gabow e Nie, bastam $k^{\log k} = 2^{\log^2 k}$ vértices em um caminho mais longo.

VII. Resultados de inaproximabilidade

Como vimos na Seção VI, para o problema do caminho mais longo, a melhor razão de aproximação que se conhece hoje é bastante fraca. É natural perguntar se é possível melhorar esse resultado ou se uma razão melhor implicaria que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Na realidade, para esse problema falta ainda compreender melhor aspectos da sua inaproximabilidade [33]. Sabemos que o problema não pode ser aproximado por uma razão constante em tempo polinomial a menos que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, nem por uma razão $2^{O(\log^{1-\epsilon} n)}$ para qualquer constante $\epsilon > 0$ a menos que $\mathbf{NP} \in DTIME(2^{\log^{1/\epsilon} n})$ [58]. Ambos os resultados valem também para o caso especial de grafos hamiltonianos cúbicos [10].

Entretanto, os resultados de aproximação conhecidos estão bem distantes dos resultados de inaproximabilidade. Com isso, fica em aberto se o problema é de fato tão difícil como aparenta ser, e, portanto, seria possível provar resultados mais fortes de inaproximabilidade, ou se existiriam algoritmos de aproximação muito melhores do que os que conhecemos hoje. Nessa linha, apresentamos uma conjectura de Karger, Motwani e Ramkumar [58], que afirma que esse problema é tão difícil de aproximar quanto outros problemas conhecidamente difíceis, como o problema de determinar um clique máximo [46] ou o número cromático [93] de um grafo.

A. Fator constante

Nesta seção, apresentamos o resultado de Karger e outros [58] de que, se existir um algoritmo de aproximação com razão constante para o problema do caminho mais longo, então $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Reproduzimos a prova desses autores com pequenas alterações para facilitar a compreensão e detalhando alguns passos que nos pareceram mais relevantes.

Primeiramente mostramos que, se o problema do caminho mais longo puder ser aproximado com alguma razão constante k em tempo polinomial, então pode ser aproximado com qualquer razão constante k' em tempo polinomial. Definimos um novo conceito de potência de grafos que será essencial para esta demonstração.

Definição 1: Seja $G = (V, E)$ um grafo. O **quadrado-aresta** de G, denotado por G^2, é obtido da seguinte forma. Substituímos cada aresta $e = uv \in E$ em G por uma cópia de G, digamos G_e, e conectamos u e v a todos os vértices de G_e. Os vértices u e v são chamados de **vértices de contato** de G_e.

Se o grafo G tem n vértices, então G^2 tem no máximo n^3 vértices. Observe que o quadrado-aresta de um grafo hamiltoniano não é necessariamente hamiltoniano. Por essa razão, a seguinte prova só se aplica para o problema de aproximar um caminho mais longo em grafos quaisquer, e não ao problema, talvez mais fácil, de aproximar um caminho mais longo em grafos que são sabidamente hamiltonianos. O lema a seguir relaciona o comprimento de um caminho mais longo em G e em G^2.

Lema 8: Seja G um grafo. Se L é o comprimento de um caminho mais longo em G, então o comprimento de um caminho mais longo em G^2 é ao menos L^2.

Prova. Seja P um caminho mais longo em G e sejam s e t os vértices das extremidades de P. Vamos exibir em G^2 um caminho P' de comprimento L^2. O caminho P' começa em s, passa pelos grafos G_e na mesma ordem que P passa pelas arestas e e termina em t. Além disso, em cada G_e pelo qual P' passa, P' percorre exatamente o mesmo caminho que P. Logo, é fácil ver que P' tem comprimento $L(L+2)$. ■

Lema 9: Seja G um grafo. Dado um caminho em G^2 de comprimento L', podemos obter em tempo polinomial um caminho de comprimento $\sqrt{L'} - 2$ em G.

Prova. Seja P' um caminho de comprimento L' em G^2. O caminho P' pode entrar e sair de uma cópia G_e de G apenas através dos vértices de contato de G_e. Portanto, podemos supor que P' começa visitando vértices de alguma cópia, digamos G_{e^*}, e depois visita uma sequência de cópias G_e distintas, a menos da última cópia que possivelmente é igual a primeira. A sequência de vértices visitados em uma cópia G_e forma um caminho em G, a menos dos vértices visitados de G_{e^*}, que possivelmente formam dois caminhos.

Seja s o maior número de vértices percorridos por P' consecutivamente dentro de alguma cópia G_e e r o número de vértices de contato que o caminho P' visita. Note que P' pode ser particionado em vértices de contato e no máximo $r+1$ caminhos com no máximo s vértices. Logo, P' tem no máximo $r + (r+1)s$ vértices. Afirmamos que $s \geq \sqrt{L'} - 1$ ou $r \geq \sqrt{L'}$. Se supormos que ambas as afirmações acima são violadas, ou seja $s < \sqrt{L'} - 1$ e $r < \sqrt{L'} - 1$, concluímos que

$$L' + 1 \leq r + (r+1)s < (\sqrt{L'} - 1) + \sqrt{L'}(\sqrt{L'} - 1) = L' - 1.$$

Uma contradição. ■

Usando esses lemas, podemos obter o seguinte resultado.

Teorema 15: Se existir um algoritmo de aproximação com razão constante para o problema do caminho mais longo, então esse problema possui um PTAS (*Polynomial Time Approximation Scheme*).

Prova. Seja A_k um algoritmo de aproximação com razão k, ou seja, A_k encontra um caminho de comprimento pelo menos L/k em um grafo cujos caminhos mais longos têm comprimento L. Vamos mostrar que, para qualquer $\epsilon > 0$ fixo, existe um algoritmo de aproximação com razão $1/(1+\epsilon)$. Note que isso implica que existe, para qualquer $\epsilon' > 0$ fixo, um algoritmo de aproximação com razão $(1 - \epsilon')$. De fato, basta definir $\epsilon = 1/(1-\epsilon') - 1$.

Seja

$$p = \left\lceil \log \frac{2 \log k}{\log(1+\epsilon)} \right\rceil .$$

Dado um grafo G com um caminho mais longo de comprimento L, se executamos o algoritmo A_k no grafo G^{2^p} obtido elevando G ao quadrado p vezes, então, pelo Lema 8, encontramos um caminho de comprimento pelo menos L^{2^p}/k em G^{2^p}. Usando o Lema 9, mostramos a seguir, por indução em

p, que podemos encontrar em G um caminho de comprimento pelo menos

$$\left(\frac{L^{2^p}}{k}\right)^{2^{-p}} - 2p.$$

De fato, para $p = 1$, o resultado segue direto do Lema 9. Para $p > 1$, pela hipótese de indução, podemos encontrar um caminho de comprimento $\left(\frac{L^{2^p}}{k}\right)^{2^{-(p-1)}} - 2(p-1)$ no grafo G^2. Pelo Lema 9, e considerando que $1 < p \leq \sqrt{L}$ e $k \leq L$, podemos encontrar em G um caminho de comprimento

$$\left(\left(\frac{L^{2^p}}{k}\right)^{2^{-(p-1)}} - 2(p-1)\right)^{2^{-1}} - 2 \geq \left(\frac{L^{2^p}}{k}\right)^{2^{-p}} - 2p.$$

Finalmente, observe que

$$\left(\frac{L^{2^p}}{k}\right)^{2^{-p}} - 2p \geq \frac{L}{\sqrt{1+\epsilon}} - p \geq \frac{L}{1+\epsilon}.$$

De fato, a primeira desigualdade segue da definição de p e a segunda vale desde que $L \geq p(1+\epsilon)/\epsilon$. Observe que para valores pequenos de L ($L < p^2$ ou $L < p(1+\epsilon)/\epsilon$), é possível calcular a solução ótima usando um algoritmo de força bruta.

Além disso, o tempo de execução do algoritmo é polinomial para ϵ fixo, pois o grafo G^{2^p} tem no máximo n^{3^p} vértices. ■

Mostramos a seguir que não existe um PTAS para o problema do caminho mais longo a menos que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. A demonstração original de Karger e outros [58] continha um erro: consideram que, para $\epsilon > 0$ fixo, um PTAS para o problema do caminho mais longo encontraria um caminho de comprimento $(1-\epsilon)n$, quando na realidade seria de $(1-\epsilon)(n-1)$. Utilizando o mesmo resultado de Arora, Lund, Motwani, Sudan e Szegedy [6] que serviu de base para a demonstração original, produzimos uma prova correta do teorema.

Teorema 16: Não existe PTAS para o problema do caminho mais longo a menos que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Prova. Provamos a seguir um resultado um pouco mais forte do que o enunciado. Mostramos que esse teorema vale mesmo no caso restrito em que as instâncias contêm um circuito hamiltoniano.

Seja TSP(1,2) o problema de encontrar uma solução ótima para o problema do caixeiro viajante (traveling salesman problem) em um grafo completo com n vértices, onde todas as arestas têm peso 1 ou 2. Papadimitriou e Yannakakis [64] mostraram que esse problema restrito é **MAX SNP**-difícil. A redução é a partir de uma versão do MAX 3SAT que também é **MAX SNP**-difícil. A seguinte afirmação pode ser obtida como consequência desse resultado. Se para todo $\delta > 0$ existe um algoritmo polinomial que, para qualquer instância do TSP(1,2) de valor ótimo n (ou seja, contendo um circuito hamiltoniano formado apenas por arestas de peso 1), devolve um circuito de peso no máximo $(1+\delta)n$, então MAX 3SAT tem um PTAS (o que implica que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, como demonstrou Arora e outros [6]).

Suponha agora que exista um PTAS para o problema do caminho mais longo em grafos que contêm um circuito hamiltoniano. Isso implica que podemos achar, em tempo polinomial, caminhos de comprimento pelo menos $(1-\epsilon)(n-1)$ em grafos hamiltonianos, para qualquer $\epsilon > 0$ fixo. Queremos mostrar que isso implica que existe um PTAS para as instâncias do TSP(1,2) que possuem valor ótimo n, ou seja, que para qualquer $\delta > 0$ fixo existe um algoritmo polinomial que, para qualquer instância do TSP(1,2) de valor ótimo n, devolve um circuito de peso no máximo $(1+\delta)n$.

Seja G uma instância do TSP(1,2) com valor ótimo n e seja $\delta > 0$ fixo. Seja H o subgrafo de G formado apenas pelas arestas de peso 1. Note que H é hamiltoniano. Definimos $\epsilon = \frac{\delta}{2}$. Vamos distinguir dois casos.

Caso 1: $\delta \geq \frac{1}{n}$.

Usando o PTAS para o problema do caminho mais longo, podemos encontrar em H um caminho de comprimento no mínimo $(1-\frac{\delta}{2})(n-1) = n-1-\frac{\delta}{2}(n-1)$. Um tal caminho pode ser estendido a um circuito hamiltoniano em G, digamos C, acrescentando-se no máximo $1+\frac{\delta}{2}(n-1)$ arestas de peso no máximo 2. Assim, C tem peso no máximo $c = n-1-\frac{\delta}{2}(n-1) + 2(1+\frac{\delta}{2}(n-1)) = n+1+\frac{\delta}{2}(n-1)$.

Se $\delta \geq \frac{2}{n+1}$, temos $c = n+1+\delta n - \frac{\delta}{2}(n+1) \leq n+1+\delta n - \frac{2/(n+1)}{2}(n+1) = (1+\delta)n$.

Se $\delta < \frac{2}{n+1}$, temos que $c = n+1+\frac{\delta}{2}(n-1) < n+1+\frac{n-1}{n+1} < n+2$. Como o peso do circuito é um número inteiro, concluímos que é no máximo $n+1$ e, para $\delta \geq \frac{1}{n}$, $n+1 \leq (1+\delta)n$.

Caso 2: $\delta < \frac{1}{n}$.

Neste caso, para cada aresta $e = uv$ do grafo H, definimos um novo grafo H_e, com $V(H_e) = V(H) \cup \{u', v'\}$ e $E(H_e) = \{uu', vv'\} \cup E(H) \setminus \{uv\}$. Note que, para qualquer aresta e que pertence a um circuito hamiltoniano de H, o grafo H_e possui um caminho hamiltoniano. Para uma tal aresta e, usando o PTAS para o problema do caminho mais longo, podemos encontrar em H_e um caminho, digamos P, de comprimento no mínimo $(1-\frac{\delta}{2})(n+1) > (1-\frac{1}{2n})(n+1) = n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n} > n$. Como o comprimento de P é um número inteiro, concluímos que é no mínimo $n+1$, ou seja, P é um caminho hamiltoniano em H_e cujas extremidades são u' e v'. Considere em H o circuito hamiltoniano obtido a partir de P removendo-se as suas extremidades u' e v', e acrescentando-se a aresta e. Assim, se e é uma aresta que pertence a um circuito hamiltoniano de H, sabemos que existe em G um circuito hamiltoniano de peso n e $n \leq (1+\delta)n$, para $\delta > 0$.

Como não sabemos quais arestas pertencem a algum circuito hamiltoniano de H, podemos utilizar o algoritmo PTAS para o problema do caminho mais longo para cada grafo H_e, $e \in E(H)$, até que obtenhamos um caminho de comprimento $n+1$. Isto implica que usando-se o algoritmo PTAS para o problema do caminho mais longo no máximo $|E(H)| \leq n^2$ vezes, podemos encontrar um circuito hamiltoniano em G de peso n. O tempo gasto nesse processo permanece polinomial em n (para ϵ fixo).

Concluímos que um PTAS para o problema do caminho mais longo pode ser transformado em um PTAS para as instâncias do TSP(1,2) que possuem valor ótimo n. ■

O seguinte corolário segue dos Teoremas 15 e 16.

Corolário 6: Se existir um algoritmo de aproximação com razão constante para o problema do caminho mais longo, então $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. ■

B. Conjectura sobre a dificuldade de aproximação

Karger e outros [58] também conjecturam que o problema do caminho mais longo é tão difícil de aproximar quanto outros problemas que são conhecidamente difíceis, como o problema do clique máximo [46] e o de determinar o número cromático de um grafo [93].

Conjectura 4: Para alguma contante $\delta > 0$, se existir um algoritmo de aproximação para o problema do caminho mais longo com razão $n^{-\delta}$, onde n é a ordem do grafo, então $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Como evidência de que essa conjectura deve valer, os mesmos autores também provam outros resultados que enunciamos a seguir.

Teorema 17: Para qualquer $\epsilon > 0$, se existir um algoritmo de aproximação para o problema do caminho mais longo com razão $2^{-\mathrm{O}(\log^{1-\epsilon} n)}$, onde n é a ordem do grafo, então $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{DTIME}\left(2^{\mathrm{O}(\log^{1/\epsilon} n)}\right)$. Esse resultado também vale para o caso especial onde o grafo tem grau limitado. ■

Teorema 18: Para qualquer $\delta > 0$, se existir um algoritmo de aproximação para o problema do caminho mais longo com razão $2^{-\mathrm{O}(\frac{\log n}{\log \log n})}$, onde n é a ordem do grafo, então $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{DTIME}\left(2^{\mathrm{O}(n^{\delta})}\right)$.

■

VIII. Considerações Finais

Como mencionado ao longo do trabalho, existem muitas questões que poderiam ser investigadas em trabalhos futuros. Reunimos aqui alguns dos problemas em aberto mencionados ao longo do trabalho e outros de especial interesse.

É realmente muito intrigante o fato de existirem tantos problemas elementares que ainda não foram resolvidos. Embora tenhamos mencionado apenas de passagem o problema da intersecção de circuitos mais longos, o problema é tão difícil quanto o de caminhos mais longos e a maior parte das perguntas citadas a seguir podem ser feitas trocando “caminhos” por “circuitos” e exigindo que o grafo seja 2-conexo. Alguns dos problemas que citamos aqui foram levantados por Zamfirescu [91], [87] e Voss [80].

Um primeira questão natural, é determinar para que classes de grafos a pergunta de Gallai tem resposta positiva. Vimos anteriormente que foi provado que todos os caminhos mais longos de grafos divididos [60] e de grafos de intervalos [9] necessariamente têm um vértice em comum. Nós também provamos que o mesmo vale para grafos exoplanares e 2-árvores. Observamos que grafos divididos, grafos de intervalos e 2-árvores são subclasses de grafos cordais para os quais o problema continua em aberto.

Pergunta 1: Todos os caminhos mais longos de um grafo cordal têm um vértice em comum?

Outra subclasse dos grafos cordais são as k-árvores. Também seria interessante investigar se a Pergunta 2 tem resposta positiva, para $k \geq 3$.

Pergunta 2: Todos os caminhos mais longos de uma k-árvore têm um vértice em comum?

Vale notar que 2-árvore são grafos série-paralelos maximais. Assim, é natural investigar a questão para grafos série-paralelos. Conforme mencionamos, Ehremüller e outros [29] obtiveram um novo resultado nessa linha, ainda não publicado em periódico. Esse resultado generaliza os resultados para grafos exoplanares e 2-árvores.

Mencionamos que existem exemplos que mostram que para grafos 2-conexos e 3-conexos nem sempre todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum. Porém, para grafos 4-conexos, o problema está em aberto.

Pergunta 3: Todos os caminhos mais longos de um grafo 4-conexo têm um vértice em comum?

Como explicamos anteriormente sabe-se apenas que isso é verdade quando se trata de grafos 4-conexos planares (já que, pelo Teorema de Tutte [75], tais grafos são hamiltonianos). Podemos também fazer a seguinte pergunta, mais geral:

Pergunta 4: Existe um inteiro k tal que todo grafo k-conexo possui um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos? Se existe, qual é o menor k que satisfaz essa propriedade?

Outra variante do problema explorada por Walther [83] e por Zamfirescu [87], é a seguinte:

Pergunta 5: Existe um inteiro j tal que, para todo grafo conexo G, algum conjunto de j vértices de G tem intersecção não vazia com qualquer caminho mais longo? Se existe, qual o menor j que satisfaz essa propriedade?

O fato da pergunta de Gallai ter resposta negativa, exclui o caso $j = 1$. O caso $j = 2$ também está excluído [42], mas de resto o problema continua em aberto. Em particular não se sabe a resposta para a seguinte pergunta:

Pergunta 6: Para qualquer grafo conexo, existe um conjunto de três vértices que intersecta todo caminho mais longo do grafo?

Aludimos anteriormente ao fato de que 2 caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum, e que o mesmo não vale para 7 caminhos mais longos. Portanto, as seguintes perguntas continuam sem respostas.

Pergunta 7: Quaisquer três caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum?

Pergunta 8: Existe um grafo no qual seis caminhos mais longos não têm um vértice em comum?

Pergunta 9: Qual é o menor inteiro p tal que quaisquer p caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum? (Sabemos que $2 \leq p \leq 6$.)

Outra abordagem, sugerida por Jimenez [55], para o problema da intersecção de caminhos mais longos seria uma combinação da variante que considera um conjunto de j vértices e da que considera a intersecção de um número fixo de caminhos mais longos.

Pergunta 10: Para todo grafo conexo G e um inteiro p, qual o menor inteiro j tal que algum conjunto de j vértices intersecta cada caminho de qualquer conjunto com p caminhos mais longos?

Como quaisquer 2 caminhos mais longos se intersectam, obviamente $j \leq p/2$. Em particular, parece interessante investigar se é verdade que para quaisquer 5 caminhos mais longos existe um conjunto de 2 vértices que intersecta cada um dos 5 caminhos.

Também vimos que o número de vértices na intersecção de dois caminhos mais longos depende da conexidade do grafo. A seguinte pergunta está em aberto:

Pergunta 11: Em um grafo k-conexo, quaisquer dois caminhos mais longos têm ao menos k vértices em comum?

Vimos que a resposta para a Pergunta 11 é afirmativa para $k \leq 7$. Hippchen [48] conjecturou que a resposta é afirmativa para qualquer k.

Referências

[1] N. Alon, P. Dao, I. Hajirasouliha, F. Hormozdiari, and S. C. Sahinalp, "Biomolecular network motif counting and discovery by color coding," *Bioinformatics*, vol. 24, no. 13, pp. i241–i249, 2008.

[2] N. Alon, R. Yuster, and U. Zwick, "Color-coding," *J. ACM*, vol. 42, no. 4, pp. 844–856, 1995.

[3] M. I. Andreica, K. Manev, M. Markov, and N. Ţăpuş, "A linear time algorithm for computing longest paths in cactus graphs," *Serdica J. Comput.*, vol. 6, no. 3, pp. 287–298, 2012.

[4] M. Araya and G. Wiener, "On cubic planar hypohamiltonian and hypotraceable graphs," *Electron. J. Combin.*, vol. 18, no. 1, p. #P85, 2011.

[5] S. R. Arikati and C. P. Rangan, "Linear algorithm for optimal path cover problem on interval graphs," *Inform. Process. Lett.*, vol. 35, no. 3, pp. 149–153, 1990.

[6] S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan, and M. Szegedy, "Proof verification and the hardness of approximation problems," *J. ACM*, vol. 45, no. 3, pp. 501–555, 1998.

[7] K. Asdre and S. D. Nikolopoulos, "The 1-fixed-endpoint path cover problem is polynomial on interval graphs," *Algorithmica*, vol. 58, no. 3, pp. 679–710, 2010.

[8] M. Axenovich, "When do three longest paths have a common vertex?" *Discrete Math. Algorithms Appl.*, vol. 1, pp. 115–120, 2009.

[9] P. N. Balister, E. Győri, J. Lehel, and R. H. Schelp, "Longest paths in circular arc graphs," *Combin. Probab. Comput.*, vol. 13, no. 3, pp. 311–317, 2004.

[10] C. Bazgan, M. Santha, and Z. Tuza, "On the approximation of finding a(nother) Hamiltonian cycle in cubic Hamiltonian graphs," *Lecture Notes in Comput. Sci.*, vol. 1373, pp. 276–286, 1998.

[11] I. Bezáková and G. B. Mertzios, "Computing and counting longest paths on circular-arc graphs in polynomial time," *Electron. Notes Discrete Math.*, vol. 37, pp. 219–224, 2011.

[12] A. Björklund and T. Husfeldt, "Finding a path of superlogarithmic length," *SIAM J. Comput.*, vol. 32, no. 6, pp. 1395–1402 (electronic), 2003.

[13] H. L. Bodlaender, "On linear time minor tests with depth-first search," *J. Algorithms*, vol. 14, no. 1, pp. 1–23, 1993.

[14] ——, "A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth," *SIAM J. Comput.*, vol. 25, no. 6, pp. 1305–1317, 1996.

[15] R. W. Bulterman, W. H. J. Feijen, F. W. van der Sommen, A. J. M. van Gasteren, T. Verhoeff, and G. Zwaan, "On computing a longest path in a tree," *Inform. Process. Lett.*, vol. 81, no. 2, pp. 93–96, 2002.

[16] S. A. Burr and T. Zamfirescu, "Unpublished manuscript."

[17] P. Cameron (Ed.), "Research problems," *Discrete Math.*, vol. 167/168, pp. 605–615, 1997, problem 276, from the Fifteenth British Combinatorial Conference.

[18] M.-S. Chang, S.-L. Peng, and J.-L. Liaw, "Deferred-query—an efficient approach for problems on interval and circular-arc graphs," in *Algorithms and Data Structures*, ser. Lecture Notes in Comput. Sci., 1993, vol. 709, pp. 222–233.

[19] R.-Y. Chang, C.-H. Hsu, and S.-L. Peng, "The longest path problem on permutation graphs," in *The 29th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*, 2012, pp. 294–297.

[20] G. Chen, R. J. Faudree, and R. J. Gould, "Intersections of longest cycles in k-connected graphs," *J. Combin. Theory Ser. B*, vol. 72, no. 1, pp. 143 – 149, 1998.

[21] G. Chen, J. Xu, and X. Yu, "Circumference of graphs with bounded degree," *SIAM J. Comput.*, vol. 33, no. 5, pp. 1136–1170, 2004.

[22] D. G. Corneil and G. B. Mertzios, "A simple polynomial algorithm for the longest path problem on cocomparability graphs," *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 26, no. 3, pp. 940–963, 2012.

[23] P. Damaschke, "The Hamiltonian circuit problem for circle graphs is NP-complete," *Inform. Process. Lett.*, vol. 32, no. 1, pp. 1 – 2, 1989.

[24] ——, "Paths in interval graphs and circular arc graphs," *Discrete Math.*, vol. 112, no. 1–3, pp. 49 – 64, 1993.

[25] P. Damaschke, J. S. Deogun, D. Kratsch, and G. Steiner, "Finding Hamiltonian paths in cocomparability graphs using the bump number algorithm," *Order*, vol. 8, no. 4, pp. 383–391, 1992.

[26] S. F. de Rezende, "Caminhos mais longos em grafos," Master's thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2014.

[27] S. F. de Rezende, C. G. Fernandes, D. M. Martin, and Y. Wakabayashi, "Intersecting longest paths," *Discrete Math.*, vol. 313, no. 12, pp. 1401 – 1408, 2013.

[28] G. A. Dirac, "Some theorems on abstract graphs," *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, vol. 2, no. 1, pp. 69–81, 1952.

[29] J. Ehrenmüller, C. G. Fernandes, and C. G. Heise, "Nonempty intersection of longest paths in series-parallel graphs," 2013, arXiv:1310.1376.

[30] P. Erdős and G. Katona, Eds., *Theory of Graphs*, ser. Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary, September 1966. New York: Academic Press, 1968, problem 4 (T. Gallai), p. 362.

[31] ——, *Theory of Graphs*, ser. Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary, September 1966. New York: Academic Press, 1968, problem 50 (H. Sachs), p. 368.

[32] T. Feder and R. Motwani, "Finding large cycles in Hamiltonian graphs," *Discrete Appl. Math.*, vol. 158, no. 8, pp. 882–893, 2010.

[33] T. Feder, R. Motwani, and C. Subi, "Approximating the longest cycle problem in sparse graphs," *SIAM J. Comput.*, vol. 31, no. 5, pp. 1596–1607, 2002.

[34] H. N. Gabow, "Finding paths and cycles of superpolylogarithmic length," *SIAM J. Comput.*, vol. 36, no. 6, pp. 1648–1671, 2007, also appeared in *Proceedings of the Thirty-sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '04, pages 407-416, 2004.

[35] H. N. Gabow and S. Nie, "Finding long paths, cycles and circuits," in *Algorithms and Computation*, ser. Lecture Notes in Comput. Sci., 2008, vol. 5369, pp. 752–763.

[36] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability*. San Francisco, Calif.: W. H. Freeman and Co., 1979, a guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.

[37] M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. E. Tarjan, "The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete," *SIAM J. Comput.*, vol. 5, no. 4, pp. 704–714, 1976.

[38] E. Ghosh, N. S. Narayanaswamy, and C. P. Rangan, "A polynomial time algorithm for longest paths in biconvex graphs," in *Proceedings of the 5th international conference on WALCOM: algorithms and computation*, ser. WALCOM'11, Berlin, Heidelberg, 2011, pp. 191–201.

[39] M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, ser. Ann. Discrete Math. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing Co., 2004, vol. 57.

[40] M. Grötschel, "On Intersections of Longest Cycles," in *Graph Theory and Combinatorics*. Academic Press, 1984, pp. 171–189.

[41] M. Grötschel and G. L. Nemhauser, "A polynomial algorithm for the max-cut problem on graphs without long odd cycles," *Math. Program.*, vol. 29, no. 1, pp. 28–40, 1984.

[42] B. Grünbaum, "Vertices missed by longest paths or circuits," *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 17, no. 1, pp. 31–38, 1974.

[43] Y.-L. Guo, C.-W. Ho, and M.-T. Ko, "The longest path problem on distance-hereditary graphs," in *Advances in Intelligent Systems and Applications - Volume 1*, ser. Smart Innovation, Systems and Technologies, 2013, vol. 20, pp. 69–77.

[44] R. K. Guy, "Monthly research problems 1969-73," *Amer. Math. Monthly*, vol. 80, pp. 1120 – 1128, 1973.

[45] J. Harris, J. Hirst, and M. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, ser. Undergrad. Texts Math. Springer, 2008.

[46] J. Hastad, "Clique is hard to approximate within 1-ϵ," *Acta Math.*, vol. 182, no. 1, pp. 105–142, 1999.

[47] W. Hatzel, "Ein planarer hypohamiltonscher Graph mit 57 Knoten," *Math. Ann.*, vol. 243, no. 3, pp. 213–216, 1979.

[48] T. Hippchen, "Intersections of longest paths and cycles," *Mathematics Theses*, vol. 80, no. Paper 53, 2008.

[49] J. D. Horton, "A hypotraceable graph," Dept. of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Tech. Rep. Research Report CORR 73-4, 1973.

[50] F. Hüffner, S. Wernicke, and T. Zichner, "Algorithm engineering for color-coding with applications to signaling pathway detection," *Algorithmica*, vol. 52, no. 2, pp. 114–132, 2008.

[51] K. Ioannidou, G. B. Mertzios, and S. D. Nikolopoulos, "The longest path problem has a polynomial solution on interval graphs," *Algorithmica*, vol. 61, no. 2, pp. 320–341, 2011, also appeared in *Proceedings of the 34th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 403-414, 2009.

[52] K. Ioannidou and S. D. Nikolopoulos, "The longest path problem is polynomial on cocomparability graphs," *Algorithmica*, vol. 65, no. 1, pp. 177–205, 2013, also appeared in *WG*, pages 27-38, 2010.

[53] A. Itai, C. H. Papadimitriou, and J. L. Szwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," *SIAM J. Comput.*, vol. 11, no. 4, pp. 676–686, 1982.

[54] R. Jain and M. Sakalle, "Survey on intersection of two maximum length paths in connected graph," *Res. J. Math. Stat. Sci.*, vol. 2, no. 3, pp. 1–3, 2014.

[55] A. Jiménez, "Private communication," 2013.

[56] F. Joos, "Longest paths in circular arc graphs," 2013+, arXiv:1312.3075, to appear in Discuss. Math. Graph Theory.

[57] M. Jooyandeh, B. D. McKay, P. R. J. Östergård, V. H. Pettersson, and C. T. Zamfirescu, "Planar hypohamiltonian graphs on 40 vertices," 2013, arXiv:1302.2698.

[58] D. Karger, R. Motwani, and G. D. S. Ramkumar, "On approximating the longest path in a graph," *Algorithmica*, vol. 18, no. 1, pp. 82–98, 1997.

[59] S. Kensell, "Intersection of longest paths," Master's thesis, Central European University, 2011.

[60] S. Klavžar and M. Petkovšek, "Graphs with nonempty intersection of longest paths," *Ars Combin.*, vol. 29, pp. 43–52, 1990.

[61] B. Monien, "How to find long paths efficiently," *Ann. Discrete Math.*, vol. 25, pp. 239–254, 1985.

[62] H. Müller, "Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs," *Discrete Math.*, vol. 156, no. 1-3, pp. 291 – 298, 1996.

[63] G. Narasimhan, "A note on the hamiltonian circuit problem on directed path graphs," *Inform. Process. Lett.*, vol. 32, no. 4, pp. 167 – 170, 1989.

[64] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, "The traveling salesman problem with distances one and two," *Math. Oper. Res.*, vol. 18, no. 1, pp. 1–11, 1993.

[65] ——, "On limited nondeterminism and the complexity of the V-C dimension," *J. Comput. System Sci.*, vol. 53, no. 2, pp. 161–170, 1996.

[66] D. Rautenbach and J.-S. Sereni, "Transversals of longest paths and cycles," *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 28, no. 1, pp. 335–341, 2014.

[67] W. Schmitz, "Über längste Wege und Kreise in Graphen," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, vol. 53, pp. 97–103, 1975.

[68] A. Shabbir, C. Zamfirescu, and T. Zamfirescu, "Intersecting longest paths and longest cycles: A survey," *Electron. J. Graph Theory Appl.*, vol. 1, no. 1, pp. 56–76, 2013.

[69] Z. Skupień, "Smallest sets of longest paths with empty intersection," *Combin. Probab. Comput.*, vol. 5, no. 4, pp. 429–436, 1996.

[70] I. A. Stewart, "On the intersections of longest cycles in a graph," *Technical Report Series*, no. 241, 1987.

[71] Y. Takahara, S. Teramoto, and R. Uehara, "Longest path problems on ptolemaic graphs," *IEICE - Trans. Inf. Syst.*, vol. E91-D, pp. 170–177, 2008.

[72] C. Thomassen, "Hypohamiltonian and hypotraceable graphs," *Discrete Math.*, vol. 9, pp. 91–96, 1974.

[73] ——, "Planar and infinite hypohamiltonian and hypotraceable graphs," *Discrete Math.*, vol. 14, no. 4, pp. 377–389, 1976.

[74] ——, "Planar cubic hypo-Hamiltonian and hypotraceable graphs," *J. Combin. Theory Ser. B*, vol. 30, no. 1, pp. 36–44, 1981.

[75] W. T. Tutte, "A theorem on planar graphs," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 82, pp. 99–116, 1956.

[76] R. Uehara and Y. Uno, "Efficient algorithms for the longest path problem," in *Algorithms and Computation*, ser. Lecture Notes in Comput. Sci., 2005, vol. 3341, pp. 1547–1553.

[77] ——, "On computing longest paths in small graph classes," *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, vol. 18, no. 5, pp. 911–930, 2007.

[78] R. Uehara and G. Valiente, "Linear structure of bipartite permutation graphs and the longest path problem," *Inform. Process. Lett.*, vol. 103, pp. 71–77, 2007.

[79] S. Vishwanathan, "An approximation algorithm for finding long paths in Hamiltonian graphs," *J. Algorithms*, vol. 50, no. 2, pp. 246–256, 2004, also appeared in *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '00, pages 680-685, 2000.

[80] H.-J. Voss, *Cycles and Bridges in Graphs*, ser. Mathematics and its Applications (East European Series). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991, vol. 49.

[81] H.-J. Voss and H. Walther, *Über Kreise in Graphen*. VEB Dt. Verlag der Wissenschaften, 1974.

[82] J. A. Wald and C. J. Colbourn, "Steiner trees, partial 2-trees, and minimum IFI networks," *Networks*, vol. 13, pp. 159–167, 1983.

[83] H. Walther, "Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen," *J. Combin. Theory*, vol. 6, pp. 1–6, 1969.

[84] ——, "Über die Nichtexistenz zweier Knotenpunkte eines Graphen, die alle längsten Kreise fassen," *J. Combin. Theory*, vol. 8, pp. 330–333, 1970.

[85] D. B. West, "Open Problems – Graph Theory and Combinatorics, Hitting all longest paths," accessed on April 2014. [Online]. Available: www.math.uiuc.edu/~west/openp/pathtran.html

[86] C. T. Zamfirescu and T. Zamfirescu, "A planar hypohamiltonian graph with 48 vertices," *J. Graph Theory*, vol. 55, no. 4, pp. 338–342, 2007.

[87] T. Zamfirescu, "A two-connected planar graph without concurrent longest paths," *J. Combin. Theory Ser. B*, vol. 13, pp. 116–121, 1972.

[88] ——, "Graphen, in welchen je zwei Eckpunkte von einem längsten Weg vermieden werden," *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, vol. 21, pp. 17–24, 1975.

[89] ——, "L'histoire et l'état présent des bornes connues pour P_k^j, C_k^j, $\overline{P}_k^j$ et $\overline{C}_k^j$," *Cahiers CERO*, vol. 7, pp. 427–439, 1975.

[90] ——, "On longest paths and circuits in graphs," *Math. Scand.*, vol. 38, no. 2, pp. 211–239, 1976.

[91] ——, "Intersecting longest paths or cycles: a short survey," *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, vol. 28, pp. 1–9, 2001.

[92] ——, "Private communication to S. Kensell," 2011.

[93] D. Zuckerman, "Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number," *Theory Comput.*, vol. 3, no. 6, pp. 103–128, 2007.